This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

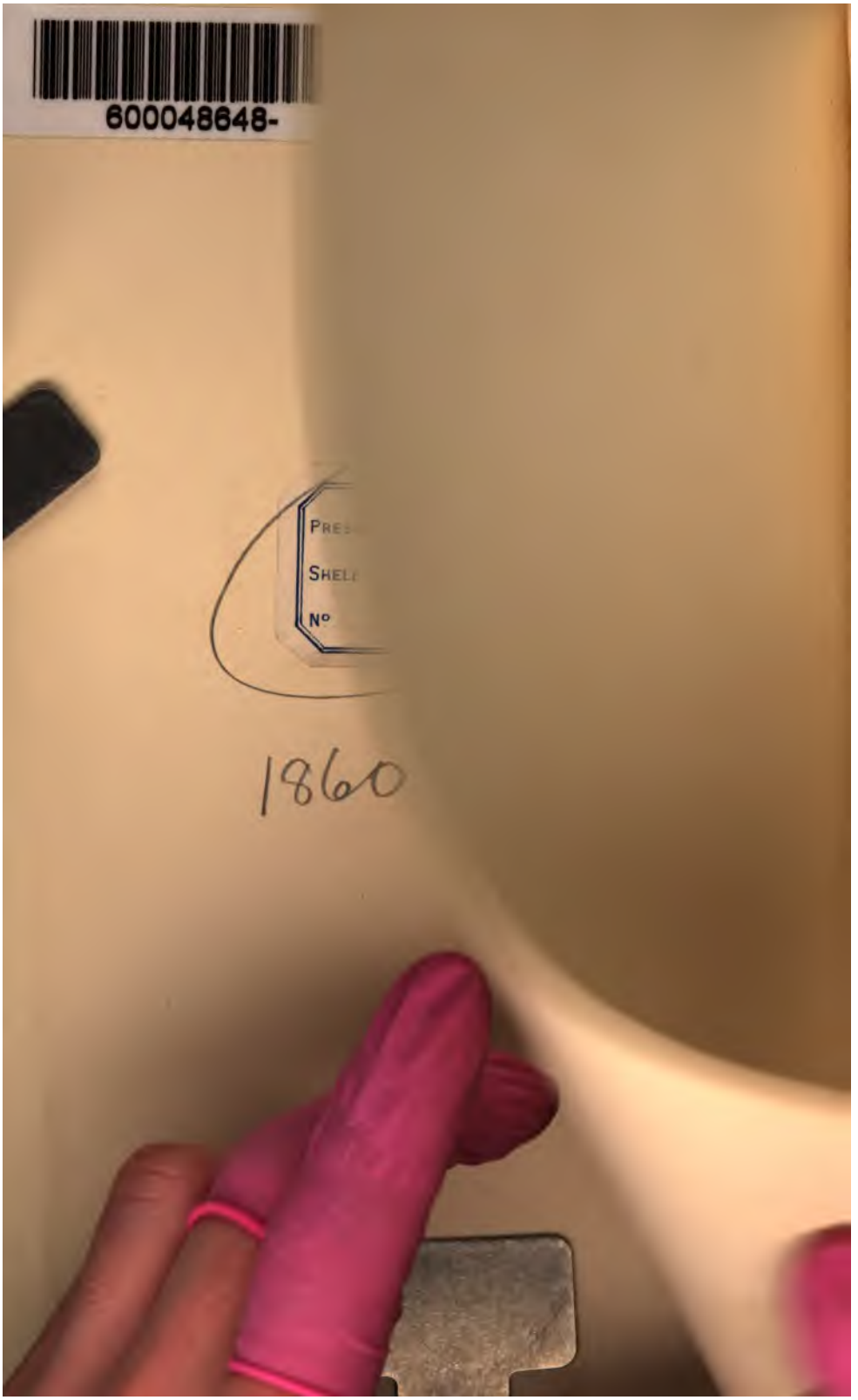
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


600048648-
PRES
SHELF
No
1860

ÉLÉMENTS
DE MÉCANIQUE.

ÉLÉMENTS
DE MÉCANIQUE.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

PUBLIÉS A LA MÊME LIBRAIRIE.

Cours complémentaire d'Analyse et de Mécanique rationnelle, professé à l'École Normale. In-8, avec planches; 1851..... 7 fr.

Théorie générale des approximations numériques, à l'usage des Candidats aux Écoles spéciales du Gouvernement. In-8; 2e édition; 1854..... 3 fr. 50.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait dans le cours de 1867, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ÉLÉMENTS

DE MÉCANIQUE

RÉDIGÉS

CONFORMÉMENT AU PROGRAMME DU NOUVEAU PLAN D'ÉTUDES
DES LYCÉES IMPÉRIAUX,

PAR M. J. VIEILLE,

INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

DEUXIÈME EDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1867

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT DE LA SECONDE ÉDITION..... XIII
AVERTISSEMENT DE LA PREMIÈRE ÉDITION..... XV

PREMIÈRE PARTIE.

STATIQUE.

PREMIÈRE LEÇON (*).

Définitions..... 1 1
Notions sur les forces. — Condition d'égalité de deux forces. — Équilibre. — Évaluation numérique des forces..... 2
Comparaison des forces aux poids à l'aide du dynamomètre. — Leur représentation géométrique..... 4
Divisions de la Mécanique..... 7
Du corps solide, tel qu'on le considère en Mécanique..... 8
Corps libre. — Corps gêné..... 9
Résultante et composantes..... 9
Composition et décomposition des forces..... 10
Translation du point d'application..... 11
Remarques sur la position du nouveau point d'application..... 13
Conséquences..... 13
Remarques sur quelques postulata et procédés de démonstration propres à la Mécanique..... 14

(*) Les sommaires placés en tête de chaque Leçon reproduisent textuellement le Programme officiel de l'enseignement de la Mécanique dans la classe de Mathématiques élémentaires des Lycées.

DEUXIÈME LEÇON.

Pages.

Résultante de deux forces dirigées suivant la même droite.... 16
Résultante d'un nombre quelconque de forces dirigées suivant la même droite..... 17
Résultante de deux forces appliquées à un même point sous un angle quelconque. — Direction. — Intensité. — Parallélogramme des forces..... 18
Problèmes sur la composition de deux forces..... 24
Décomposition d'une force en deux autres de directions données. 25
Cas où les directions données sont rectangulaires..... 26
Moments des forces par rapport à un point. — Théorème de Varignon..... 26
Signes des moments. — Rotations fictives..... 29

TROISIÈME LEÇON.

Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point. — Polygone des forces..... 32
Condition générale d'équilibre..... 33
Cas de trois forces. — Parallélipipède des forces..... 33
Équilibre de trois forces concourantes..... 34
Décomposition d'une force en trois autres de directions données. 35
Réduction du cas général à celui de trois forces rectangulaires. 36
Projection de la résultante sur un axe..... 38
Développement de la condition générale d'équilibre..... 39
Remarque..... 40
Exercices..... 41

QUATRIÈME ET CINQUIÈME LEÇON.

Résultante de deux forces parallèles et de même sens, déduite du cas de deux forces concourantes..... 42
Démonstration directe..... 44
Remarques..... 45
Décomposition d'une force en deux autres parallèles à la première..... 46
Résultante de deux forces parallèles et de sens contraires..... 46
Du couple..... 47
Théorème des moments..... 48
Remarque sur les signes qu'il convient d'attribuer aux forces parallèles et aux perpendiculaires..... 50
Cas du couple..... 50

Pages.

Résultante d'un nombre quelconque de forces situées dans un même plan. — Extension du théorème des moments..... 51
Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — Centre des forces parallèles..... 52
Des moments des forces parallèles par rapport à un plan..... 54
Application à la détermination du centre des forces parallèles. 56
Centre des moyennes distances..... 57
Exercices..... 58

SIXIÈME ET SEPTIÈME LEÇON.

Pesanteur..... 60
Poids. — Centre de gravité..... 61
Détermination expérimentale du centre de gravité..... 62
Corps homogènes..... 63
Ce qu'on appelle centre de gravité d'une surface, d'une ligne.. 64
Cas où le corps a un centre, ou un axe, ou un plan de symétrie. 64
Ceutre de gravité du contour d'un triangle..... 65
Centre de gravité de l'aire du triangle..... 65
Autre démonstration..... 66
Corollaire..... 68
Centre de gravité d'un polygone quelconque..... 68
Trapèze. — Quadrilatère..... 69
Centre de gravité du prisme triangulaire..... 71
Prisme quelconque..... 72
Centre de gravité de la pyramide triangulaire..... 73
Autre démonstration..... 74
Corollaire..... 75
Remarques..... 75
Pyramide quelconque..... 76
Centre de gravité du tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles..... 76
76
Polyèdre quelconque. — Cylindre, cône et tronc de cône..... 78
Théorème de Leibnitz..... 79
Exercices..... 81

HUITIÈME LEÇON.

Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide. — Leur réduction à deux..... 83
De l'indétermination que présente cette réduction..... 84
Réduction du système à une force et à un couple..... 85
Condition pour que toutes les forces aient une résultante unique. 87

Pages.
Condition générale de l'équilibre d'un corps solide libre..... 88
Développement de cette condition générale..... 88
Application des six équations d'équilibre à quelques cas particuliers..... 92
Exercices..... 93

DEUXIÈME PARTIE.

DES MACHINES SIMPLES.

NEUVIÈME ET DIXIÈME LEÇON.

Notions sur les machines à l'état de repos ou d'équilibre..... 95
Du levier..... 95
Condition générale d'équilibre..... 97
Cas où le levier n'est sollicité que par deux forces, une puissance et une résistance..... 98
Charge du point d'appui..... 99
Leviers de différents genres..... 99
Cas général..... 100
Cas où les forces qui sollicitent le levier sont toutes situées dans un même plan..... 101
Des balances. — Balance ordinaire..... 102
Justesse..... 103
Position du centre de gravité par rapport au point d'appui..... 104
Sensibilité..... 107
Examen du cas où les points de suspension des plateaux et le point d'appui du fléau ne sont pas en ligne droite..... 108
Méthode des doubles pesées..... 109
Romaine..... 110
Graduation de la romaine..... 110
Bascule du commerce..... 112
Bascule-romaine (système Béranger)..... 116
Balance de Roberval modifiée (système Béranger)..... 118
Exercices..... 121

ONZIÈME LEÇON.

De la poulie fixe..... 123
Condition d'équilibre de la poulie fixe..... 124
Cas d'une poulie à gorge elliptique..... 125

DIX-SEPTIÈME ET DIX-HUITIÈME LEÇON.

Pages.

Loi de l'inertie..... 201
Il n'existe pas de force dont l'effet soit instantané..... 202
Nouveau point de vue sous lequel on peut considérer la vitesse dans le mouvement rectiligne varié..... 202
Loi du mouvement relatif..... 204
Extension de la notion d'équilibre..... 205
Lorsqu'une force agit sur un point matériel déjà animé d'une vitesse de même direction que la force, la vitesse au bout d'un temps quelconque est la somme (algébrique) de la vitesse initiale et de celle que la force est capable d'imprimer dans le même temps au mobile partant du repos..... 205
Mouvement produit par une force constante..... 207
La pesanteur est une force constante..... 208
Proportionnalité des forces constantes aux accélérations..... 209
Cas où l'une des forces est le poids même du point matériel... 210
De la masse. — Sa mesure au moyen du poids. — Unité de masse. 211
Cas d'un mobile de dimensions finies, dont tous les points décrivent des droites parallèles..... 214
Expression des forces constantes en ayant égard aux masses.. 215
Il n'existe pas de corps absolument fixes..... 217
Quantité de mouvement..... 217
Mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné (abstraction faite du frottement)..... 218
De l'accélération considérée sous un autre point de vue. — Mesure des forces d'intensité variable dans le mouvement rectiligne..... 219
Récapitulation des formules du mouvement rectiligne..... 221
De la réaction égale et contraire à l'action..... 222
Du cas où la vitesse initiale du mobile n'a pas la même direction que la force..... 223
Formules générales du mouvement d'un point dans l'espace... 224
Application des principes précédents au mouvement parabolique des projectiles dans le vide..... 227
Cas le plus simple du choc des corps..... 232
Exercices..... 237

DIX-NEUVIÈME ET VINGTIÈME LEÇON.

Du travail en Mécanique..... 239
Extension de la définition du travail. — Sa mesure..... 240
Unité de travail : kilogrammètre..... 243

TROISIÈME PARTIE.

ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE ET DE DYNAMIQUE.

QUINZIÈME ET SEIZIÈME LEÇON.

Pages.

De la Cinématique. — Du temps et de sa mesure..... 173
Équation du mouvement rectiligne et uniforme. — Remarques sur les signes et sur les unités..... 174
Tracé géométrique : espace et vitesse..... 176
Mouvement varié. — Vitesse à un instant quelconque..... 177
Tracé géométrique..... 179
Mouvement direct, rétrograde..... 181
Simples notions sur le mouvement curviligne. — Vitesse; sa grandeur, sa direction..... 181
Mouvement rectiligne et uniformément varié. — Accélération.. 182
Du mouvement uniformément accéléré..... 184
Chute des corps dans le vide..... 185
Du mouvement uniformément retardé..... 186
De l'accélération à un instant quelconque dans le mouvement rectiligne varié..... 188
Dépendances mutuelles de l'espace parcouru, de la vitesse et de l'accélération dans le mouvement rectiligne varié..... 189
Composition de deux mouvements simultanés rectilignes et uniformes. — Vitesse du mouvement résultant. — Parallélogramme des vitesses..... 189
Autre énoncé du même théorème..... 191
Réciproque..... 192
Composition d'un nombre quelconque de mouvements simultanés rectilignes et uniformes. — Parallélipipède des vitesses. — Projections du mobile sur trois axes fixes..... 192
Équations du mouvement rectiligne et uniforme d'un point projeté sur trois axes fixes..... 194
Composition de deux mouvements simultanés, rectilignes et uniformément variés. — Accélération du mouvement résultant. — Parallélogramme des accélérations..... 196
Composition de deux mouvements simultanés rectilignes, l'un uniforme, l'autre uniformément varié..... 197
Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. — Vitesse angulaire..... 198

DIX-SEPTIÈME ET DIX-HUITIÈME LEÇON.

Pages.

Loi de l'inertie..... 201
Il n'existe pas de force dont l'effet soit instantané..... 202
Nouveau point de vue sous lequel on peut considérer la vitesse dans le mouvement rectiligne varié..... 202
Loi du mouvement relatif..... 204
Extension de la notion d'équilibre..... 205
Lorsqu'une force agit sur un point matériel déjà animé d'une vitesse de même direction que la force, la vitesse au bout d'un temps quelconque est la somme (algébrique) de la vitesse initiale et de celle que la force est capable d'imprimer dans le même temps au mobile partant du repos..... 205
Mouvement produit par une force constante..... 207
La pesanteur est une force constante..... 208
Proportionnalité des forces constantes aux accélérations..... 209
Cas où l'une des forces est le poids même du point matériel... 210
De la masse. — Sa mesure au moyen du poids. — Unité de masse. 211
Cas d'un mobile de dimensions finies, dont tous les points décrivent des droites parallèles..... 214
Expression des forces constantes en ayant égard aux masses.. 215
Il n'existe pas de corps absolument fixes..... 217
Quantité de mouvement..... 217
Mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné (abstraction faite du frottement)..... 218
De l'accélération considérée sous un autre point de vue. — Mesure des forces d'intensité variable dans le mouvement rectiligne..... 219
Récapitulation des formules du mouvement rectiligne..... 221
De la réaction égale et contraire à l'action..... 222
Du cas où la vitesse initiale du mobile n'a pas la même direction que la force..... 223
Formules générales du mouvement d'un point dans l'espace... 224
Application des principes précédents au mouvement parabolique des projectiles dans le vide..... 227
Cas le plus simple du choc des corps..... 232
Exercices..... 237

DIX-NEUVIÈME ET VINGTIÈME LEÇON.

Du travail en Mécanique..... 239
Extension de la définition du travail. — Sa mesure..... 240
Unité de travail : kilogrammètre..... 243

Pages.

Travail de la résultante de plusieurs forces constantes, appliquées à un point dont le déplacement est rectiligne..... 244
Travail de la pesanteur dans le mouvement d'un corps ou système de corps pesants..... 245
Des machines à l'état de mouvement. — Forces mouvantes et résistantes..... 246
Du frottement pendant le mouvement..... 247
Du frottement des tourillons sur leurs coussinets..... 252
De la résistance au roulement..... 252
Des machines à l'état de mouvement uniforme..... 252
Égalité du travail moteur au travail résistant..... 253
Généralisation des résultats précédents..... 261
Théorème de la transmission du travail. — Influence des résistances passives..... 262
Du cheval-vapeur..... 263
De la force vive. — Relation entre la force vive et le travail dans le mouvement rectiligne d'un point matériel..... 264
Énoncé du principe général des forces vives; conséquences.... 268
Impossibilité du mouvement perpétuel..... 269

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

AVERTISSEMENT DE LA SECONDE ÉDITION.

Cette nouvelle édition ne diffère de la première que par des améliorations de détail. Nous n'avons rien changé à l'ordre des matières : c'est celui que les travaux des plus illustres géomètres, depuis Archimède jusqu'à d'Alembert, ont consacré, et qui se résume en ces termes : prendre la science de l'équilibre pour base de celle du mouvement.

Toutefois nous sommes loin d'exclure, comme *introduction* au cours de Mécanique, les notions préliminaires sur le mouvement, considéré indépendamment des causes qui le produisent. Les éléments de *Cinématique*, bien que placés dans la troisième Partie de l'Ouvrage (quinzième et seizième Leçon), y forment un Chapitre à part que le lecteur pourra aborder immédiatement. Mais ce que nous n'admettons pas, ce qui nous semble contraire à l'ordre chronologique des découvertes de la science aussi bien qu'à l'ordre logique, c'est que la composition des forces soit subordonnée à celle des vitesses.

Le texte a été revu et corrigé avec soin; plusieurs

théories ont été simplifiées, notamment celle du parallélogramme des forces, celle des bascules du commerce. Des développements nouveaux, relatifs au mouvement des projections d'un mobile sur trois axes fixes, nous ont conduit aux formules générales du mouvement d'un point dans l'espace.

Avec ces additions, l'Ouvrage, sans cesser d'être élémentaire, formera une introduction plus complète aux Cours de Mécanique rationnelle ou appliquée des grandes Écoles de l'État. Nous n'avons rien négligé pour justifier la faveur avec laquelle la première édition a été accueillie par le corps enseignant.

AVERTISSEMENT DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

L'enseignement de la Mécanique, dans les Lycées impériaux, a subi depuis 1852 des modifications profondes, que l'on s'accorde généralement à regarder comme trop radicales. Pendant nombre d'années, cet enseignement était resté borné à la *Statique*, sur laquelle l'illustre POINSOT avait composé un *Traité élémentaire*, modèle de clarté et d'élégance. Cependant beaucoup de bons esprits, tout en reconnaissant la nécessité d'enseigner les principes de l'équilibre des forces, regrettaient qu'on s'arrêtât là, et qu'on laissât les jeunes gens exposés à en tirer des conséquences fausses sur les machines à l'état de mouvement. Il eût suffi, pour prévenir ce danger, de faire suivre les Éléments de Statique des notions essentielles sur le mouvement et sur le travail des forces dans les machines.

Il n'en a pas été ainsi. Bien que la théorie de l'équilibre n'exige point l'étude préalable du mouvement que les forces sont capables d'imprimer à

ÉLÉMENTS
DE MÉCANIQUE.

Je rappellerai enfin le nom d'un savant dont la mémoire est chère au corps enseignant, et auquel sont dus bien des perfectionnements qui ont cours aujourd'hui, sans nom d'auteur, dans l'enseignement secondaire. STURM ne touchait pas à une théorie mathématique sans l'élucider. J'ai puisé, dans mes entretiens avec ce maître éminent, d'utiles indications qui ont passé dans mes Leçons de Mécanique du Lycée Louis-le-Grand, et se retrouveront dans cet Ouvrage.

Mon but serait atteint, si, en donnant à mes jeunes lecteurs des idées exactes sur les éléments de la Mécanique, j'étais parvenu à leur inspirer le goût des fortes études et le désir de pénétrer plus avant dans une science si féconde en applications.

ÉLÉMENTS
DE MÉCANIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉLÉMENTS DE STATIQUE.

PREMIÈRE LEÇON.

PROGRAMME. — Notions sur les forces. — Condition d'égalité de deux forces. — Leur évaluation numérique. — Comparaison des forces aux poids à l'aide du dynamomètre. — On admet que deux forces égales et contraires, appliquées à deux points liés par une droite invariable de longueur et agissant dans la direction de cette droite, se font équilibre. — Translation du point d'application d'une force en un point quelconque de sa direction, qu'on suppose lié invariablement au premier.

1. *Définitions.* — On appelle *matière* tout ce qui peut affecter nos sens : la terre, l'eau, l'air nous présentent la matière dans ses divers états.

Un *corps* est une portion déterminée de matière.

On dit qu'un corps est *en repos* ou *en mouvement,* selon que sa position dans l'espace reste constamment la même ou qu'elle change d'une manière continue. On ne peut juger de l'état de repos ou de mouvement d'un corps, qu'en rapportant sa position à celle d'autres corps que l'on considère comme fixes. Or, nous ne connaissons dans l'espace aucun point absolument *fixe.* Par suite, tous les états de repos et de mouvement que nous observons sont nécessairement *relatifs.*

Cependant notre esprit conçoit parfaitement le repos et le mouvement *absolus*.

Tout corps est *mobile*, c'est-à-dire qu'il peut occuper successivement différentes positions dans l'espace; mais il ne se meut pas *de lui-même*. Toutes les fois qu'un corps passe, sous nos yeux, du repos au mouvement, nous apercevons que ce changement est dû à une cause extérieure qui agit sur lui. A la vérité, ce n'est là qu'un mouvement relatif. Mais procédant par induction, nous nous élevons à cette proposition générale, dont la vérité est confirmée par l'accord constant qui existe entre les conséquences qu'on en tire et les phénomènes observés, savoir :

Un corps en repos restera indéfiniment dans cet état, si une cause extérieure ne vient à le mettre en mouvement (*).

Cette cause quelconque de mouvement s'appelle *force*.

2. *Notions sur les forces. — Condition d'égalité de deux forces. — Équilibre. — Évaluation numérique des forces.* — Il existe des forces de différentes natures; telles sont :

La *pesanteur* ou *gravité*, qui fait tomber les corps vers la terre dès qu'ils sont abandonnés à eux-mêmes; les *attractions* et *répulsions moléculaires*, dont les effets se manifestent avec énergie dans les machines à vapeur, dans l'emploi des ressorts, etc.; les *forces électriques* et *magnétiques*; l'*action musculaire* de l'homme et des animaux.

Il y a trois choses à considérer dans une force :

1° *Le point d'application*. C'est une partie, infiniment petite en tous sens, de la matière du corps, sur laquelle la force exerce directement son action. Ce point *matériel* ne doit pas être confondu avec le *point* sans étendue, tel qu'on le considère en Géométrie; cependant, comme ses dimen-

(*) La *loi de l'inertie*, dont cette proposition n'est qu'une partie, sera complétée dans la seconde Partie du Cours.

sions sont infiniment petites, sa position dans l'espace se détermine de la même manière que celle du point géométrique.

Un corps de dimensions finies peut être regardé comme l'assemblage d'un nombre infini de points matériels.

2° *La direction.* C'est l'élément de ligne droite que la force tend à faire parcourir à son point d'application, dans le premier instant, et que celui-ci parcourrait effectivement s'il était entièrement libre. Par exemple, la direction de la pesanteur est la ligne suivant laquelle les corps tombent en chute libre : elle est perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, et on la nomme *verticale.*

3° *L'intensité.* Deux forces sont dites égales lorsque, étant appliquées, en sens contraire l'une de l'autre, à un même point matériel libre et en repos, elles ne lui communiquent aucun mouvement; on dit alors que ces deux forces *se font équilibre.*

Deux forces ayant été reconnues égales, si, au lieu de les opposer l'une à l'autre, on les applique au même point, dans la même direction, elles *s'ajoutent* pour former ce qu'on appelle une *force double.* Ainsi, une force double d'une autre est une force capable de remplacer deux forces égales à cette autre et agissant sur le même point, dans la même direction.

Il reviendrait au même de dire qu'une force double d'une autre est la force capable de tenir en équilibre l'ensemble de deux forces égales à cette autre, appliquées au même point et en sens contraire de la première.

Pareillement, la réunion de trois, quatre,... forces égales, appliquées au même point et dans la même direction, formera une force triple, quadruple,... des premières.

Ainsi les forces peuvent, comme les autres grandeurs déjà considérées en Mathématiques, être évaluées en nombres : il suffit pour cela de les rapporter toutes à une force convenue prise pour unité.

3. *Comparaison des forces aux poids à l'aide du dynamomètre. — Leur représentation géométrique.* — Il importe de bien comprendre que toutes les forces, quelle que soit leur nature particulière, sont des grandeurs *homogènes,* et par suite comparables dans leurs effets à l'une d'elles, la pesanteur par exemple.

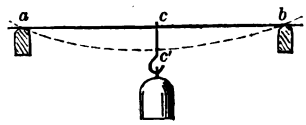
Observons d'abord que, lorsqu'une force est appliquée à un corps gêné par un obstacle, il arrive souvent qu'aucun mouvement n'est produit. Et cependant l'effet de la force n'est pas nul, il se traduit par une *pression* exercée sur l'obstacle.

Ainsi, quand nous soutenons un corps pesant avec la main, nous ressentons la pression qu'exerce la pesanteur.

Cette pression est ce que l'on appelle le *poids* du corps.

Au lieu de tenir le corps à la main, si on le suspend par un crochet au milieu *c* d'une lame d'acier horizontale *ab* (*fig.* 1) posée librement sur deux appuis, l'effet de la pesanteur se manifeste par une *flexion* du ressort; la lame

Fig. 1.



se courbe et prend la forme *ac'b*. L'expérience, d'accord avec la théorie de la résistance des matériaux à la flexion, apprend que la flèche *cc'* est proportionnelle à la force appliquée au ressort, du moins tant que celle-ci ne dépasse pas une certaine limite.

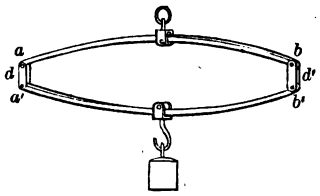
Pression, flexion, sont des effets similaires de la force sur l'obstacle ou sur le lien physique qui s'oppose au mouvement.

Cela posé, il est facile de comprendre la disposition et l'usage des *dynamomètres* (δυναμις, force; μετρον, mesure). Ce sont des instruments, de forme variable, qui servent à

mesurer les intensités des forces. Le principe du dynamomètre à une lame vient d'être indiqué (*fig.* 1). Prenons pour unité de poids le kilogramme, c'est-à-dire le poids d'un décimètre cube d'eau distillée, à la température de 4 degrés. Suspendons successivement à la lame *ab* des poids croissants de kilogramme en kilogramme, par exemple de 30, 31, 32,..., 40 kilogrammes; elle fléchira de plus en plus, et l'on pourra mesurer à chaque fois la longueur de la flèche. Cela fait, si l'on vient à appliquer au ressort, non plus un poids, mais une force de nature quelconque, par exemple celle d'un cheval s'exerçant par l'intermédiaire d'une corde, et que celle-ci produise la même flexion qu'un poids de 38 kilogrammes, on dira que la force de traction du cheval est de 38 kilogrammes. C'est ainsi que le kilogramme peut être pris pour unité de force.

Les dynamomètres les plus usités sont *à deux lames :* ils ont l'avantage de doubler les flexions. L'un des plus convenables a été imaginé par M. Poncelet. Il se compose essentiellement de deux lames d'acier égales et parallèles *ab*, *a'b'* (*fig.* 2), dont les extrémités sont unies par des boulons à deux petites brides *d*, *d'*, de manière à former un rectangle.

Fig. 2.



Les lames peuvent tourner librement autour des boulons, et chacune peut fléchir sans que l'autre lui fasse obstacle. Elles portent en leurs milieux des crochets ou anneaux dont l'un s'attache à un obstacle fixe, tandis que la force de traction est appliquée à l'autre. On mesure d'abord la distance de ces points milieux, quand aucune force n'est

appliquée à l'instrument, puis l'augmentation de distance qui résulte de l'action d'une force. Cette augmentation est proportionnelle à l'intensité de la force.

Il va de soi que les mêmes lames ne peuvent servir pour mesurer de petites et de grandes forces. La pratique a montré que la flèche d'une lame ne doit pas dépasser le $\frac{1}{5}$ de sa longueur.

(*) Si, au lieu de laisser aux lames ab, $a'b'$ une égale épaisseur sur toute leur longueur, on leur donne une forme telle, que le profil longitudinal de la face *extérieure* de chacune d'elles soit parabolique, la face intérieure demeurant plane, la sensibilité de l'instrument sera doublée. Car, pour les mêmes efforts, la flexion d'un ressort parabolique est double de celle d'un ressort rectangulaire. Cette forme offre un autre avantage : c'est que la résistance à la rupture est la même en tous les points; tandis que, dans une lame à faces parallèles, le point de moindre résistance, le plus exposé à la rupture, est le milieu du ressort.

On peut aussi adopter la disposition représentée dans les *fig.* 3 et 4. Une lame d'acier AOB est recourbée en son

Fig. 3.

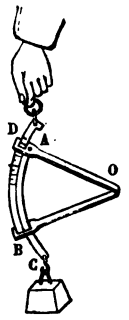
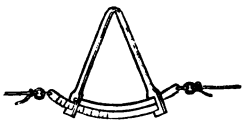


Fig. 4.



milieu : à ses extrémités sont fixés deux arcs en fer, dont

(*) Les passages imprimés en petits caractères peuvent être omis à la première lecture. Ils renferment en général des développements non exigés. Cependant nous les recommandons à l'attention des candidats aux Écoles spéciales.

l'un AC passe librement à travers une ouverture pratiquée dans la branche inférieure OB et porte un crochet de suspension, tandis que l'autre BD traverse une ouverture pratiquée dans la branche supérieure et se termine par un anneau. Si l'on attache celui-ci à un point fixe ou qu'on le tienne à la main, et que l'on suspende au crochet C des poids croissants de kilogramme en kilogramme, les points A et B se rapprocheront, et l'on pourra marquer à chaque fois, au point de l'arc extérieur BD où s'arrête l'extrémité de la lame que cet arc traverse, le nombre de kilogrammes correspondant. L'instrument ainsi gradué, placé dans la position indiquée par la *fig.* 4, fournira en kilogrammes la grandeur d'une traction quelconque, qui ne dépasse pas la limite d'élasticité du ressort.

Il est commode de représenter les intensités des forces par des longueurs proportionnelles que l'on porte sur leurs directions, à partir du point d'application, et dans le sens même où elles agissent. C'est ce que nous ferons constamment : les énoncés des théorèmes prendront ainsi une forme géométrique qui se gravera plus aisément dans la mémoire.

4. *Divisions de la Mécanique.* — Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un corps, ou système de corps, dont les différentes parties sont liées entre elles de telle manière que l'on voudra, les liaisons font que chaque point ne peut céder isolément à la force qui agit sur lui ; et il peut arriver même que ces forces ne communiquent au système aucun mouvement. On dit alors qu'il y a *équilibre.*

La *Mécanique* est la science qui traite de l'équilibre et du mouvement. On donne le nom de *Statique* à la partie de cette science qui recherche les lois de l'équilibre des forces. L'autre branche de la Mécanique, qui a pour objet de déterminer le mouvement que prennent les corps quand l'équilibre n'a pas lieu, se nomme *Dynamique.* C'est par la Statique que nous commencerons.

M. Poinsot fait observer avec raison, dans son *Traité de Statique,* que pour établir les lois de l'équilibre des forces il n'est pas nécessaire de connaître préalablement les divers mouvements qu'elles seraient capables d'imprimer à leurs points d'application, eu égard à leurs directions et à leurs intensités, si ces points étaient libres de céder à leur action; mais qu'il suffit de considérer les forces comme des grandeurs homogènes, susceptibles de se détruire mutuellement lorsque certaines conditions sont satisfaites. Ce n'est que plus tard, quand on veut passer de l'équilibre au mouvement, que de nouvelles données, relatives à l'effet actuel des forces sur la matière, deviennent nécessaires.

En plaçant ainsi la Statique avant la Dynamique, nous aurons non-seulement l'avantage d'aller du simple au composé, mais encore celui de suivre l'ordre *chronologique* des découvertes de la science, lequel ne diffère pas d'ailleurs de l'ordre *logique*. Le génie d'Archimède avait créé la Statique et en avait tiré d'importantes applications, bien des siècles avant que la Dynamique formât corps de doctrine; et le principe de d'Alembert permet de ramener toute question de mouvement à une question d'équilibre (*).

5. *Du corps solide, tel qu'on le considère en Mécanique.* — Un corps *solide* sera, pour nous, un simple assemblage de points matériels, liés entre eux par des droites rigides et inextensibles, de manière à former une figure invariable. On conçoit que, pour déterminer les conditions d'équilibre des forces, on fasse d'abord abstraction de plusieurs propriétés des corps naturels; autrement le problème serait d'une complication telle, qu'il cesserait d'être abordable aux Mathématiques. Ainsi, nous négligerons la

(*) *Voir,* pour plus de développements sur ce point de doctrine, l'intéressante Préface du *Cours de Mécanique* de M. Duhamel (2e édition).

compressibilité de la matière, propriété en vertu de laquelle tous les corps de la nature se déforment un tant soit peu par suite des efforts auxquels ils sont soumis. Cette déformation est généralement très-petite; et si l'on conçoit que le corps (levier, poulie, treuil, etc.) ait subi, sous l'action des forces considérées, le léger changement que celles-ci tendent à lui imprimer, ce sera en réalité à cette figure nouvelle, extrêmement peu différente de la première, que se rapporteront les conditions d'équilibre auxquelles nous parviendrons. Nous négligerons aussi, tout d'abord, le poids des corps, bien que la pesanteur agisse sur toutes les parties matérielles qui les constituent : nous nous réservons de tenir ensuite compte de cette force en l'associant aux autres.

6. *Corps libre. — Corps gêné.* — Au point de vue de la Statique, un corps solide peut être placé dans deux conditions différentes :

Ou bien il est *libre,* c'est-à-dire qu'il peut prendre indifféremment, sous l'action des forces qu'on lui applique, telles positions que l'on veut dans l'espace.

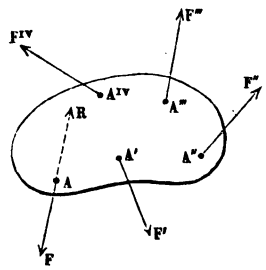
Ou bien il est *gêné,* c'est-à-dire que certains obstacles, considérés comme inébranlables et invariablement liés au corps, restreignent les mouvements qu'il est susceptible de prendre. Par exemple, s'il existe un point fixe dans un corps, celui-ci n'aura plus que la liberté de pirouetter en tous sens autour de ce point. S'il existe un axe fixe, le mouvement sera encore plus restreint; car chaque point ne pourra que décrire un arc de cercle dont le plan sera perpendiculaire à l'axe et le centre sur cet axe.

Nous nous occuperons d'abord du corps solide entièrement libre. Le cas du corps gêné se déduira du précédent.

7. *Résultante et composantes.* — Considérons un corps solide ou système de points (*fig.* 5) A, A′, A″, A‴,..., invariable et parfaitement libre dans l'espace, auquel sont

appliquées des forces en équilibre F, F′, F″, F‴,.... Si l'on vient à appliquer au point A une nouvelle force R, égale et contraire à la force F, l'équilibre sera détruit; et puisque l'effet des forces primitives était nul, le corps se

Fig. 5.



mouvra en vertu de cette seule force R. Mais d'un autre côté, on peut dire que la force R annulant la force F, le corps n'est soumis qu'à l'action combinée des autres forces F′, F″, F‴,... Ainsi, la force R produit à elle seule le même effet (quel qu'il soit) que le système des forces F′, F″, F‴,..., et peut conséquemment les remplacer.

Lorsqu'une force unique peut ainsi en remplacer plusieurs autres, on la nomme *résultante;* et celles-ci prennent, à l'égard de la résultante, le nom de *composantes.*

Ainsi, dans le cas que nous venons de considérer, la force R sera dite la résultante des forces F′, F″, F‴,.... Remarquons que cette résultante est égale et contraire à F; on peut donc formuler cette proposition, qui nous sera très-utile par la suite : *Quand plusieurs forces se font équilibre sur un corps solide libre, l'une quelconque d'entre elles est égale et opposée à la résultante de toutes les autres.*

La réciproque est évidente.

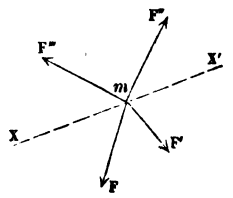
8. *Composition et décomposition des forces.* — Le problème qui a pour objet de trouver la résultante d'un sys-

tème de forces données se nomme la *composition des forces*. Réciproquement, une force étant donnée, on peut se proposer de la *décomposer* en plusieurs autres capables de produire le même effet, et remplissant des conditions données.

Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un corps, on conçoit qu'il importe en général de savoir les réduire au plus petit nombre possible. Mais il faut se garder de croire que tout système de forces appliquées à un corps solide admet une résultante *unique*. On verra plus tard qu'en général leur nombre est réductible à deux.

Citons de suite un cas où l'on est certain qu'il existe une résultante unique : c'est celui d'un système de forces F, F′, F″, F‴,..., *appliquées à un même point* (*fig.* 6).

Fig. 6.



En effet, ce point *m* tend à se mouvoir suivant une certaine direction *m*X ; et il est clair qu'en lui appliquant une force de grandeur convenable et de sens opposé *m*X′, on pourra empêcher le mouvement de se produire. Cette force, faisant équilibre au système des forces proposées, sera égale et opposée à leur résultante.

9. *Translation du point d'application.* — Nous terminerons ces préliminaires par une proposition importante dont la Statique fait un usage continuel : *On peut, sans changer l'effet d'une force qui sollicite un corps, transporter son point d'application en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit invariablement lié au premier.*

La démonstration repose sur le lemme suivant, que nous admettrons comme évident :

Deux forces égales P et Q (*fig.* 7), appliquées à deux points A et B dont la distance est invariable, et dirigées suivant la même droite en sens contraire l'une de l'autre, se font équilibre.

La symétrie qui a lieu dans les deux sens de la droite AB conduit naturellement à admettre cette proposition; on ne voit pas de raison pour que, de l'action des deux forces, il résulte un mouvement d'un côté plutôt que de l'autre.

Cela posé, soit P une force appliquée au point A d'un corps (*fig.* 8), et B un point pris à volonté sur la direc-

Fig. 7.

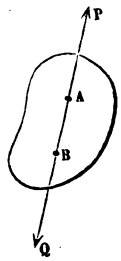
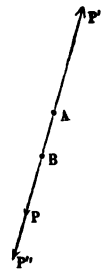


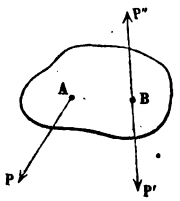
Fig. 8.



tion de la force, du côté où celle-ci tend à entraîner le point A ou de l'autre côté, mais avec la condition que la distance AB soit invariable. Je puis appliquer aux extrémités A et B de la droite AB, et suivant les directions opposées AP′, BP″, deux forces P′, P″ égales à P; car l'effet de ces deux forces est nul, d'après le lemme ci-dessus. Mais les deux forces égales et contraires P et P′, appliquées au même point A, se détruisent aussi. On peut donc les supprimer sans rien changer à l'état du corps. Alors il ne reste plus que la force P″, qui n'est autre que la force P transportée au point B de sa direction. C. Q. F. D.

10. *Remarques sur la position du nouveau point d'application.* — La force P pourrait-elle, sans que son effet fût changé, être remplacée par une autre force dont le point d'application serait pris *hors de la direction* de la première? La réponse est négative, si, comme on le suppose, le corps est libre. En effet, soit B (*fig.* 9) un point pris hors de la direction de la force P, et P′ une force (égale ou non à P) destinée à la remplacer. On peut toujours appliquer en B la force P′, pourvu qu'on en détruise l'effet par une force P″ égale et contraire. Mais, pour que le système des trois forces P, P′, P″ se réduisît à la seule force P′,

Fig. 9.



il faudrait que P et P″, considérées à part, se fissent équilibre. Or, ceci est impossible : car si l'équilibre existe, on ne le troublera pas en rendant fixe un point pris sur la direction de la force P. Mais par là on détruit cette force; et la force P″, *demeurant seule et ne passant pas par le point fixe,* aura évidemment pour effet de mettre le corps en mouvement autour de ce point.

11. *Conséquences.* — De ce qui vient d'être établi, nous tirons d'abord cette proposition réciproque : *Toutes les fois que l'on pourra prouver qu'une force appliquée à un corps ou système libre peut, sans que son effet soit changé, être remplacée par une autre force appliquée en un certain point, on en conclura que la direction de la première passait par ce point.* De plus, *la nouvelle force sera égale*

à la première; car il est établi que, si elle lui est égale, elle peut la remplacer (9); et il est bien clair qu'en l'augmentant ou en la diminuant, on altérerait son effet sur le système.

On déduit encore de ce qui précède, que *si des forces appliquées à un système libre ont une résultante, cette résultante est* UNIQUE, c'est-à-dire qu'il n'y a pas lieu d'en chercher une seconde. En effet, toute force capable de produire le même effet que la première résultante devra être appliquée en un point de la direction de celle-ci, et de plus avoir une intensité égale. Elle ne différera donc pas de la première.

12. *Remarques sur quelques postulata et procédés de démonstration propres à la Mécanique.* — La Mécanique a besoin, comme toute science, d'emprunter certaines données à l'expérience. Déjà nous nous sommes appuyé, au début de ces Leçons, sur un fait expérimental relatif à l'inertie de la matière. Maintenant, nous admettons que si un corps peut tourner librement autour d'un point fixe, et qu'il ne soit sollicité que par une seule force dont la direction ne passe pas par ce point, ce corps entrera en mouvement.

A la vérité, ce *postulatum* ne saurait être établi par l'expérience dans les conditions rigoureuses que l'énoncé suppose; car la nature ne nous offre ni point absolument fixe, ni corps libre de pirouetter, sans qu'il y ait de résistance à vaincre, autour d'un de ses points. Mais il suffit que l'expérience ait été faite dans des conditions aussi approchées que possible de celles que nous venons d'indiquer, et qu'elle ait toujours confirmé la proposition avancée : l'induction fait le reste. On pose le principe; et l'accord constant qui existe entre les résultats déduits de la théorie et les phénomènes d'équilibre ou de mouvement observés fournit *à posteriori* une preuve invincible de la certitude du principe admis.

L'introduction de nouvelles forces qui se détruisent d'elles-mêmes, l'introduction d'un ou plusieurs points fixes, sont des moyens de démonstration fréquemment employés dans la Statique. On peut, sans changer l'état d'un système invariable, ajouter telles nouvelles forces qu'on voudra, pourvu qu'elles se détruisent dans l'hypothèse où elles agiraient seules sur le système. On peut aussi, sans troubler l'équilibre d'un système de forces appliquées à des points liés entre eux d'une manière quelconque, fixer un ou plusieurs de ces points ou les lier entre eux de telle manière qu'on voudra : l'introduction de ces points fixes, de ces liaisons nouvelles, ne fait que gêner les mouvements possibles du système; par conséquent, si l'équilibre existait auparavant, il doit subsister après, *à fortiori*.

DEUXIÈME LEÇON.

PROGRAMME — Composition de deux forces appliquées à un même point. — Théorème des moments par rapport à un point pris dans le plan des forces.

13. *Résultante de deux forces dirigées suivant la même droite.* — Le cas le plus simple de la composition de deux forces est celui où elles sont dirigées suivant la même droite et dans le même sens. *Les deux forces ont alors une résultante égale à leur somme et dirigée suivant cette droite.* Ceci résulte immédiatement de la définition d'une force *multiple* d'une autre (2). En effet, soient P et Q les forces données, et k la force qui leur sert de commune mesure, en sorte que

$$P = mk, \quad Q = nk,$$

m et n étant des nombres entiers.

On peut remplacer la force P par m forces égales à k, appliquées au même point et dans la même direction, et la force Q par n forces égales aux premières. Le point est maintenant sollicité par $m+n$ forces égales ou, ce qui revient au même, par une force unique égale à leur somme $(m+n)k$ ou $P+Q$.

La démonstration étant indépendante de la petitesse de la commune mesure, on regardera la proposition comme établie pour deux forces quelconques.

Cependant, si l'on veut insister sur le *cas où les deux forces sont incommensurables*, on raisonnera ainsi : Soit k une force de grandeur aussi petite qu'on voudra, dont la force P est un multiple. La force Q ne sera pas un multiple exact de k, et l'on aura

$$P = mk,$$
$$nk < Q < (n+1)k,$$

m et n étant des nombres entiers.

D'où

$$(m+n)\,k < P+Q < (m+n+1)\,k.$$

Soit R l'intensité inconnue de la résultante. Il est clair qu'on aura aussi

$$(m+n)\,k < R < (m+n+1)\,k.$$

Par conséquent, la différence $R-(P+Q)$, si elle existait, serait moindre que k. Mais cette différence est, de sa nature, une grandeur *fixe*. Il est donc inadmissible qu'elle soit moindre que la quantité *arbitraire* k. Donc elle n'existe pas, et l'on a

$$R = P+Q.$$

Si, au lieu de deux forces, on en suppose un nombre quelconque P, Q, R,..., agissant toutes suivant la même droite et dans le même sens, on voit de même qu'elles ont une résultante égale à leur somme $P+Q+R....$

Considérons maintenant le cas de deux forces P, Q dirigées suivant la même droite, mais de sens contraires. Soit $P > Q$; on peut regarder la force P comme la somme de deux forces, l'une égale à Q, qui détruit la force égale et contraire, l'autre égale à $P-Q$, qui est la résultante. Ainsi les *deux forces ont une résultante égale à leur différence, et agissant dans le sens de la plus grande.*

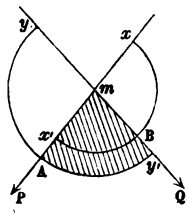
14. *Résultante d'un nombre quelconque de forces dirigées suivant la même droite.* — En rapprochant les deux cas que nous venons de considérer, on a cette proposition générale :

La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à même point, suivant la même droite, est égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent dans le sens contraire, et elle agit dans le sens de la plus grande somme.

En convenant de donner le signe + à toutes les forces qui tirent dans un sens et le signe — à celles qui tirent dans le sens contraire, on peut dire encore que *la résultante est égale à la somme algébrique des composantes.*

15. *Résultante de deux forces appliquées à un même point sous un angle quelconque. — Direction. — Intensité. — Parallélogramme des forces.* — Nous savons déjà qu'il existe une résultante (8). De plus, elle est située dans le plan PmQ (*fig.* 10), qui comprend les directions des deux forces P et Q : car il n'y a pas de raison pour qu'elle

Fig. 10.



soit dirigée d'un côté du plan plutôt que du côté opposé. On reconnaît encore facilement que la résultante doit être dirigée dans l'intérieur de l'angle PmQ. Car, si la force P existait seule, le point m suivrait la direction xx' de cette force; mais la force Q intervenant tend à entraîner le mobile dans la région du plan située du même côté qu'elle, xBx'. On voit de même que le point m ne peut se mouvoir que dans la région yAy'. Il se mouvra donc dans la partie commune à ces deux régions, c'est-à-dire dans *l'intérieur* de l'angle PmQ.

Maintenant, quelle sera, dans cet angle, *la direction* de la résultante?

On ne l'aperçoit immédiatement que si les deux forces sont égales; car alors il n'y a pas de raison pour que la résultante s'incline plus sur l'une des forces que sur l'autre : elle est donc, dans ce cas, dirigée suivant la bissectrice de l'angle PmQ.

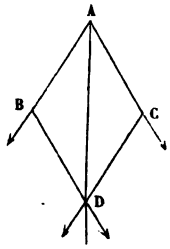
Pour résoudre la question dans le cas général, nous nous appuierons sur ce lemme :

Deux forces égales appliquées à un même point peuvent

être transportées parallèlement à elles-mêmes au sommet opposé du losange construit sur les longueurs qui les représentent, sans que leur action soit changée, pourvu que le nouveau point d'application soit lié invariablement au premier.

En effet, ces deux forces représentées (*fig.* 11) par les

Fig. 11.



longueurs égales AB, AC, ont une résultante dirigée suivant la diagonale bissectrice AD. Cette dernière peut être regardée comme appliquée au point D (8); et là, si on la décompose en deux forces égales dirigées suivant les prolongements des côtés BD, CD, on retrouvera évidemment les deux forces primitives, transportées parallèlement à elles-mêmes au point D.

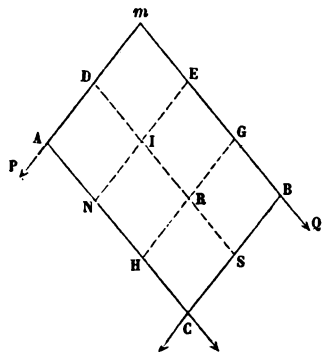
Cela posé, considérons deux forces inégales P et Q appliquées à un même point m (*fig.* 12), et dont les intensités sont représentées par les longueurs mA, mB. Nous allons démontrer que ces forces peuvent, sans que leur action soit changée, être transportées parallèlement à elles-mêmes au sommet C du parallélogramme mACB, pourvu que ce point soit invariablement lié au point m. Il en résultera que la direction de la résultante passe par le point C (10), et par suite qu'elle se confond avec la diagonale mC.

Supposons les forces commensurables, et soit, pour fixer les idées,

$$P = 2k, \quad Q = 3k,$$

k étant la force qui sert de commune mesure. Si l'on divise mA en deux parties égales, mB contiendra trois de ces parties. Par les points de division D, E, G, menons des parallèles aux côtés du parallélogramme mACB, nous formerons ainsi un réseau de losanges égaux, que nous supposerons in-

Fig. 12.



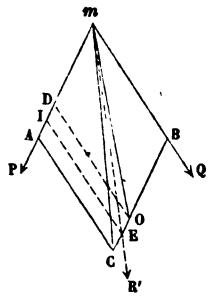
variable de figure. Les forces P et Q pourront d'abord être remplacées : la première par deux forces égales à k, appliquées aux points m et D et représentées par les divisions mD et DA, la seconde par trois forces égales aux premières, appliquées aux points m, E, G et représentées par les divisions mE, EG, GB.

Cela posé, il résulte du lemme précédent que les deux forces égales mD, mE peuvent être transportées au sommet I du losange mDIE, suivant les directions IN, IR; puis, que la force IR, considérée comme appliquée en D, et la force DA peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes en N. On a alors, suivant la direction EN, deux forces égales à k, qui s'ajoutent pour recomposer une force égale et parallèle à P, et suivant la direction AC une simple force k qui n'est autre que la composante mE de la force Q, transportée sur le côté opposé du parallélogramme mANE. Par le même raisonnement, on voit que la force P, actuellement dirigée suivant EN, et la composante EG vont

se transporter l'une sur GH et l'autre sur AC; enfin que la force P dirigée suivant GH et la dernière composante GB se transporteront l'une sur BC, l'autre sur AC. On aura en définitive, suivant BC, la force P, et, suivant AC, trois forces égales qui recomposeront la force Q. Les deux forces proposées seront ainsi transportées parallèlement à elles-mêmes au sommet C, sans que leur action sur le point *m* ait changé. C. Q. F. D.

Dans le cas où les forces sont incommensurables on prouve, par la réduction à l'absurde, que la résultante est encore dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les longueurs qui représentent les deux forces. Supposons en effet qu'elle n'ait pas cette direction, et qu'elle tombe dans l'angle C*m*Q (*fig.* 13); elle coupera le côté CB en un certain point O. Prenons AD égale à CO. Quelque petite que soit la longueur AD, on peut concevoir *m*B divisée en parties égales plus petites; et si l'on porte l'une d'elles sur *m*A, autant de fois que possible, à partir du point *m*, il tombera au moins un point de division I entre D et A. Cela posé, regardons la force P comme la somme de deux autres représentées par *m*I et IA. La force Q ou *m*B et la force *m*I étant commensurables, leur résultante R′ sera dirigée

Fig. 13.



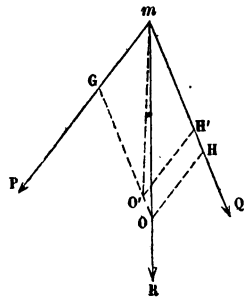
suivant la diagonale *m*E du parallélogramme *m*IEB, laquelle passera dans l'angle P*m*O; et pour avoir la résultante définitive, il restera à composer cette force R′ avec la force IA qu'on regardera comme appliquée en *m*. Mais la direction de cette résultante sera

comprise dans l'angle PmE, et dès lors ne pourra coïncider avec mO qui, par hypothèse, est la direction de la résultante des forces P et Q. Donc, etc.

La direction de la résultante étant connue, il reste à déterminer son *intensité*.

Remarquons d'abord que du moment qu'on connaît les directions de deux forces appliquées à un même point et celle de leur résultante, on peut en conclure le *rapport des intensités* des deux composantes. Il suffit de prendre un point quelconque O (*fig.* 14) sur la résnltante, et de mener

Fig. 14.



par ce point les parallèles OG, OH aux composantes jusqu'à la rencontre de leurs directions. Soient P et Q leurs intensités, je dis qu'on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{mG}{mH}.$$

Car, si cette proportion n'était pas vraie, on aurait

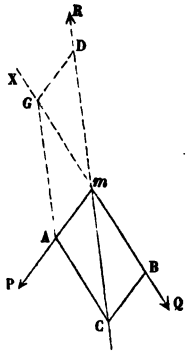
$$\frac{P}{Q} = \frac{mG}{mH'},$$

mH' étant plus grande ou plus petite que mH; mais alors la résultante serait dirigée suivant la diagonale mO' du parallélogramme $mGO'H'$ et non suivant mO, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, concevons qu'on applique au point m une

force égale et contraire à la résultante (*fig.* 15), et désignons sa grandeur inconnue par R : il y aura équilibre

Fig. 15.



entre les trois forces P, Q, R. L'une d'elles, la force Q par exemple, sera donc égale et opposée (7) à la résultante des deux autres. Ainsi, en prolongeant la direction de la force Q, de l'autre côté de *m*, en *m*X, on aura la *direction* de la résultante des deux forces P et R. Puis, si l'on mène par le point A une parallèle à *m*R jusqu'à la rencontre de *m*X et qu'on achève le parallélogramme *m*AGD, il résulte de la remarque précédente que

$$\frac{P}{R} = \frac{mA}{mD}.$$

Mais, par hypothèse, *m*A représente l'intensité de la force P; donc *m*D représente la force R. Or, on a

$$mD = GA = mC.$$

Donc, enfin, l'intensité de la résultante des deux forces P et Q est égale à la diagonale *m*C.

Nous pouvons maintenant formuler le théorème complet du *parallélogramme des forces :*

Deux forces quelconques appliquées à un même point

ont une résultante représentée en direction et en intensité par la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent ces forces en direction et en intensité.

On voit que deux forces P et Q, qui agissent sous un angle différent de deux droits, ne peuvent avoir une résultante nulle, autrement dit, se faire équilibre : car la diagonale mC du parallélogramme construit sur les longueurs qui réprésentent ces forces ne saurait être nulle, à moins qu'elles ne soient égales et de sens contraire.

16. *Problèmes sur la composition de deux forces.* — Le triangle AmC (*fig.* 16) comprend tous les éléments qui ont trait aux grandeurs et aux directions des forces P, Q et de leur résultante R. En effet, les côtés mA, AC, mC sont respectivement proportionnels aux grandeurs des trois forces; et les angles AmC, ACm, mAC sont respectivement égaux aux angles de P avec R, de Q avec R, et au supplément de l'angle de P avec Q.

Trois quelconques de ces six éléments étant donnés (pourvu qu'il y entre au moins la grandeur d'une force), on pourra se proposer de déterminer les trois autres : ce sont des problèmes déjà résolus dans la Trigonométrie.

Si l'on désigne par P, Q, R les intensités des forces, et par (P, Q), (P, R), (Q, R) les angles que leurs directions font entre elles, le triangle AmC donnera les relations connues

$$(1) \qquad \frac{P}{\sin(Q, R)} = \frac{Q}{\sin(P, R)} = \frac{R}{\sin(P, Q)},$$

$$(2) \qquad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(P, Q).$$

Le signe + du dernier terme provient de ce que l'angle P, Q) est le supplément de m AC.

Les équations (1) expriment que :

Chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.

L'équation (2) fournit la valeur de la résultante, quand on donne en nombres les grandeurs des composantes, ainsi que l'angle qu'elles font entre elles. On connaît les transformations logarithmiques qu'elle peut subir.

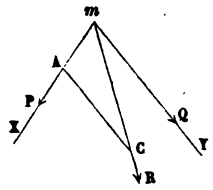
Si $P = Q$, on en tire

$$R = 2P\cos\frac{1}{2}(P, Q);$$

si de plus $(P, Q) = 180$ degrés, on a $R = 0$. Ce cas, déjà indiqué, est le seul où les deux forces P et Q se détruisent.

17. *Décomposition d'une force en deux autres de directions données.* — Réciproquement, une force R étant donnée (*fig.* 16), on pourra toujours la décomposer en deux autres, appliquées au même point suivant des directions données mX, mY, pourvu qu'elles soient *comprises dans un même plan avec la force* R. Il suffira en effet de prendre, sur la direction de R, une longueur mC arbitraire, et de mener du point C une parallèle CA à la direction mY jusqu'à la rencontre de mX; mA et CA seront

Fig. 16.



proportionnelles (15) aux intensités des deux composantes P et Q, et même les représenteront, si l'on convient que mC représente la force donnée R. Les relations (1) fourniront

$$P = R\frac{\sin(Q, R)}{\sin(P, Q)}, \quad Q = R\frac{\sin(P, R)}{\sin(P, Q)}.$$

18. *Cas où les directions données sont rectangulaires.* — Si l'angle (P, Q) = 90 degrés, on aura simplement

$$P = R\cos(P, R), \quad Q = R\cos(Q, R),$$

$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

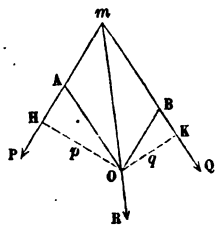
Chaque composante est donc égale *à la projection de la résultante sur sa propre direction.*

Cette projection de la force R sur une direction mX est ce qu'on appelle aussi *la force* R *estimée suivant* mX.

19. *Moments des forces par rapport à un point. — Théorème de Varignon* (*). — On appelle *moment d'une force par rapport à un point* le produit de la force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction.

Il est facile de voir que les moments de deux forces P et Q, par rapport à un point quelconque O (*fig.* 17) pris

Fig. 17.



sur la direction de leur résultante, sont égaux.

En effet, si du point O l'on mène des parallèles OA, OB aux directions des forces et des perpendiculaires OH, OK sur ces mêmes directions, l'égalité des triangles mOA, mOB donne

$$mA \times OH = mB \times OK,$$

ou bien, en remplaçant mA, mB par les forces P, Q qui

(*) Varignon, célèbre géomètre français, né en 165$\frac{4}{}$, membre de l'Académie des Sciences en 1688, mort en 1722.

leur sont proportionnelles (15), et désignant, pour abréger, par p, q les perpendiculaires correspondantes,

$$Pp = Qq.$$

Cette proposition n'est qu'un cas particulier du théorème de Varignon, lequel s'énonce ainsi :

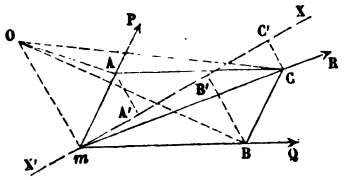
Le moment de la résultante de deux forces appliquées à un même point, par rapport à un point quelconque de leur plan, est égal à la somme des moments des composantes.

Soient P, Q les deux forces représentées par mA, mB (*fig.* 18); R leur résultante; O le point du plan PmQ par rapport auquel on prend les moments, et que nous supposerons d'abord *hors de l'angle* PmQ *et de son opposé par le sommet.*

Les moments des forces P, Q, R, par rapport au point O, sont, d'après leur définition, respectivement doubles des aires des triangles OmA, OmB, OmC; en sorte que le théorème de Mécanique qui nous occupe revient à cette proposition de Géométrie :

L'aire OmC du triangle construit sur la diagonale d'un parallélogramme est égale à la somme des aires OmA, OmB des triangles construits sur les côtés adjacents.

Fig. 18.



En effet, ces triangles peuvent être considérés comme ayant même base Om; il suffit donc de faire voir que la hauteur abaissée du sommet C sur cette base est égale à la somme des hauteurs des sommets A et B. Soit mené par le

point m l'axe XX′ perpendiculaire à Om, et projetons les points A, B et C sur cet axe. Les projections mC′, mA′, mB′ seront respectivement égales aux trois hauteurs considérées. Or, on a évidemment

$$mC' = mB' + B'C',$$

ou, remplaçant B′C′ par mA′ (qui lui est égale comme projection, sur le même axe, d'une droite mA égale et parallèle à BC),

$$mC' = mA' + mB',$$

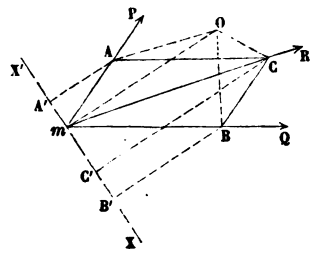
ce qui démontre le théorème énoncé.

On remarquera qu'ici les points A et B sont situés *d'un même côté* de la droite Om; et par suite les projections, sur l'axe perpendiculaire mX, de mA et mB, sont *dirigées dans le même sens,* à partir de m.

Supposons maintenant le point O *dans l'intérieur de l'angle* PmQ (*fig.* 19).

Les points A et B étant situés de *côtés différents* de Om,

Fig. 19.



les projections mA′, mB′, sur l'axe XX′, seront dirigées en sens contraires, et l'on aura

$$mC' = mB' - B'C'$$

ou, remplaçant B′C′ par son égale mA′,

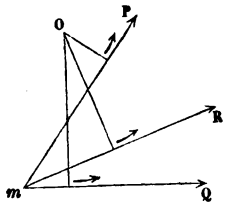
$$mC' = mB' - mA'.$$

Ainsi, maintenant, l'aire O*m*C est égale, non plus à la somme, mais à la *différence* O*m*B — O*m*A; en d'autres termes, le moment de la résultante des deux forces P et Q, par rapport au point O, est égal à la différence des moments des composantes.

Mais il est préférable de conserver un seul et même énoncé pour les deux cas; et, à cet effet, on convient d'attribuer des signes aux moments, ainsi que nous allons l'expliquer.

20. *Signes des moments.* — *Rotations fictives.* — Imaginons que le point O soit fixe, et que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les forces soient liées invariablement avec lui; considérons chaque force comme appliquée à l'extrémité de la perpendiculaire qui lui correspond : cette perpendiculaire sera comme un *bras de levier* que la force tendra à faire tourner autour du point O. Enfin, pour apprécier le sens de cette rotation fictive, supposons un observateur debout sur le plan, les pieds en O, et regardant le mouvement. Il est évident que, dans le cas où le point O est pris hors de l'angle P*m*Q (*fig.* 20) ou de son opposé

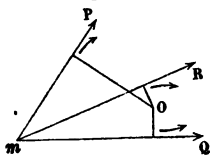
Fig. 20.



par le sommet, les trois rotations que tendent à produire les forces P, Q, R sont *de même sens* pour l'observateur, dirigées de sa droite à sa gauche, comme l'indiquent les flèches.

Il en est autrement dans le cas de la *fig.* 21, où le point

Fig. 21.



O est pris dans l'angle des forces ou dans son opposé par le sommet. Les forces P et R tendent évidemment à faire tourner leurs bras de levier de gauche à droite, pour l'observateur placé en O, tandis que la force Q tend à faire tourner de droite à gauche. Cela posé, nous conviendrons de donner le signe + aux moments des forces qui tendent à faire tourner leurs bras de levier dans un certain sens (de gauche à droite, par exemple), et le signe — aux moments des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire. Avec cette convention, le théorème des moments pourra toujours s'énoncer ainsi :

Le moment de la résultante est égal à la somme (algébrique) *des moments des composantes.*

Il importe d'ajouter que *la résultante tend à faire tourner son bras de levier dans le même sens que la composante qui a le plus grand moment.* C'est ce que montrent clairement les *fig.* 20 et 21.

Ce théorème sera étendu (39) à un nombre quelconque de forces situées dans un même plan.

En désignant par p, q, r les distances respectives du point O aux forces P, Q, R, le théorème de Varignon s'exprime par l'équation

$$Rr = Pp + Qq,$$

où chaque moment porte son signe conformément à la convention ci-dessus.

Pour tout point O *pris sur la direction de la résultante,* on a $r = 0$, et par suite

$$Pp = -Qq.$$

Les moments des composantes sont égaux et de signes contraires. C'est ce que nous avions déjà trouvé (19), abstraction faite des signes des moments.

Réciproquement, *si les moments de deux composantes sont égaux et de signes contraires, par rapport à un certain point de leur plan, ce point appartient à la direction de la résultante.* En effet, la somme $Pp + Qq$ étant nulle, on a $Rr = 0$; et, comme R n'est pas supposée nulle, il en résulte $r = 0$.

TROISIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point. — Condition d'équilibre.

21. *Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point. — Polygone des forces.* — La règle du parallélogramme étant établie, il est aisé de composer un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, et dirigées comme on voudra dans l'espace.

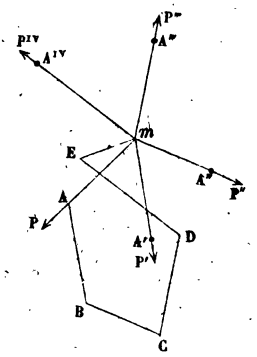
En effet, on composera d'abord deux de ces forces en une seule par la règle du parallélogramme; puis cette résultante partielle avec une troisième force, puis la nouvelle résultante avec une quatrième force, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on les ait épuisées toutes. La dernière résultante obtenue sera évidemment capable de remplacer le système des forces primitives; et comme elle est unique (11), sa grandeur et sa direction seront indépendantes de l'ordre suivi dans les compositions successives.

En représentant les grandeurs des composantes P, P′, P″, P‴,..., par des longueurs mA, mA′, mA″, mA‴,... (*fig.* 22), prises sur leurs directions, les opérations que nous venons d'indiquer conduisent à une construction graphique remarquable, et se résument dans un théorème qu'on peut appeler le *polygone des forces.*

Par le point A, menons la droite AB égale et parallèle à mA′. La ligne qui joindrait le point m au point B représenterait en grandeur et en direction la première résultante partielle. Mais, comme elle ne nous est pas nécessaire, nous ne la traçons pas. Menons ensuite par le point B la droite BC égale et parallèle à mA″, il est clair que la ligne qui joindrait dans l'espace le point m au point C représenterait en grandeur et en direction la résultante des trois

premières forces P, P′, P″, et ainsi de suite. Donc, *si l'on décrit dans l'espace un contour polygonal* m ABCDE,

Fig. 22.



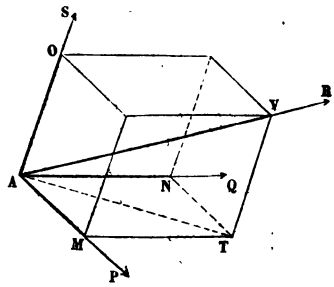
plan ou gauche, dont les côtés successifs soient parallèles et proportionnels aux forces proposées, la droite mE *qui fermera ce contour sera parallèle et proportionnelle à la résultante du système.*

22. *Condition générale d'équilibre.*—Pour que les *forces* P, P′, P″,... se fassent équilibre sur le point *m* supposé libre, il faut et il suffit que leur résultante soit nulle, ou, ce qui revient au même, *que le contour polygonal* m ABCDE *se ferme de lui-même*. Telle est, sous sa forme la plus synthétique, la condition d'équilibre d'un système quelconque de forces appliquées à un même point. Nous la développerons plus loin.

23. *Cas de trois forces. — Parallélipipède des forces.* — Quand les forces données sont au nombre de trois, non situées dans un même plan, la construction précédente donne pour résultante la diagonale du parallélipipède dont ces forces sont les trois arêtes adjacentes. En effet, soient P, Q, S les trois forces représentées en grandeur et en direction par AM, AN, AO (*fig.* 23). La droite AV, qui ferme le contour ANTV, dont les côtés sont égaux et paral-

lèles aux forces, représente la grandeur et la direction de la résultante. Or, si l'on achève la construction du parallélipipède dont AM, AN, AO sont les trois arêtes contiguës,

Fig. 23.

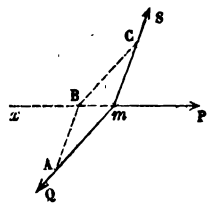


il est visible que AV est la diagonale qui joint deux sommets opposés de ce parallélipipède.

On voit par cette construction que trois forces appliquées au même point, *et non situées dans un même plan,* ne se font jamais équilibre : car la diagonale AV ne saurait être nulle, si les trois forces ne sont pas séparément nulles.

24. *Équilibre de trois forces concourantes.* — Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que l'une des forces soit égale et opposée à la résultante des deux autres (7). Il en résulte : 1° que si l'on prolonge la direction *m*P de l'autre côté de *m*, en *mx* (*fig.* 24), on aura la direction de la

Fig. 24.



résultante des deux autres forces Q et S ; et comme celle-ci est nécessairement comprise dans le plan de ses deux com-

posantes, on voit déjà que *les trois forces doivent être situées dans un même plan;* 2° que si mB représente la grandeur de la force P, et qu'on achève le parallélogramme mABC, on aura (16)

$$\frac{P}{\sin(Q, S)} = \frac{Q}{\sin(xmS)} = \frac{S}{\sin(xmQ)};$$

mais les angles xmS, xmQ sont suppléments des angles (P, S), (P, Q). Donc

$$\frac{P}{\sin(Q, S)} = \frac{Q}{\sin(P, S)} = \frac{S}{\sin(P, Q)}.$$

En résumé, pour que trois forces appliquées à un même point se fassent équilibre, il faut *que les trois forces soient situées dans un même plan, et que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

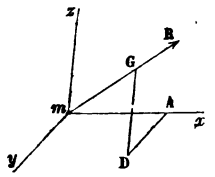
Ces conditions sont suffisantes, pourvu qu'il soit entendu que l'une des forces tire en dehors de l'angle formé par les deux autres. Car alors la diagonale mB du parallélogramme construit sur deux des forces est nécessairement égale à la troisième et de sens contraire.

25. *Décomposition d'une force en trois autres de directions données.* — Une force quelconque R étant donnée, on pourra toujours la décomposer en trois autres forces de directions données mx, my, mz, pourvu qu'elles ne soient pas toutes trois comprises dans un même plan et que deux d'entre elles ne soient point parallèles.

En effet, si l'on prend sur la direction de R (*fig.* 25) une longueur mG qui en représente l'intensité; que par le point G on mène GD, parallèle à mz, jusqu'à la rencontre du plan xmy; enfin DA, parallèle à my, jusqu'à la rencontre de mx, on formera le contour polygonal GDAm dont les côtés mA, AD, GD représenteront les trois com-

posantes cherchées. Pour les avoir en position, c'est-à-dire appliquées au point m même, il suffira d'achever le parallélipipède dont mA, AD, GD sont les arêtes.

Fig. 25.



Si les trois axes mx, my, mz sont rectangulaires, on a

$$mG = \sqrt{\overline{mA}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DG}^2},$$

$$mA = mG \cos A\,mG, \text{ etc.},$$

ou bien, en désignant par X, Y, Z les composantes dirigées respectivement suivant mx, my, mz, et par a, b, c les angles que la résultante R fait avec les axes,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$X = R\cos a, \quad Y = R\cos b, \quad Z = R\cos c.$$

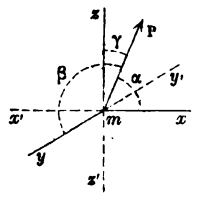
Ces équations comprennent celles du n° 18, lorsque l'une des composantes, Z par exemple, est supposée nulle, auquel cas la résultante R est comprise dans le plan des deux autres.

26. *Réduction du cas général à celui de trois forces rectangulaires.* — Le polygone des forces (21) ne fait pas connaître comment la grandeur et la direction de la résultante sont liées aux grandeurs numériques des composantes et aux angles que leurs directions font entre elles. Le moyen le plus simple de répondre à cette question est de réduire d'abord toutes les forces données à trois autres, dirigées suivant trois axes rectangulaires.

Soient P, P′, P″, P‴,..., les forces qui sollicitent le point m. Menons à volonté par ce point trois axes rectan-

gulaires xx', yy', zz' (*fig.* 26). Soient α, β, γ les angles (aigus ou obtus) que la force P fait respectivement avec les

Fig. 26.



parties mx, my, mz des axes; α', β', γ' les angles analogues pour la force P', et ainsi de suite. Chaque force P sera décomposable en trois autres dirigées suivant les axes; et ces composantes seront égales aux *valeurs absolues* des produits

$$P\cos\alpha, \quad P\cos\beta, \quad P\cos\gamma.$$

Je dis *valeurs absolues,* attendu que la force P peut occuper, dans l'un des huit angles trièdres formés par les axes, une position telle, qu'un ou plusieurs des angles α, β, γ soient obtus, et qu'alors ce sont les suppléments de ces angles obtus qui doivent figurer dans la construction du parallélipipède des forces. Mais remarquons que, selon que le cosinus d'un angle α est positif ou négatif, la composante qui lui correspond agit suivant la partie mx de l'axe xx' ou suivant son prolongement mx'. Par suite, le signe du produit $P\cos\alpha$ peut servir à indiquer le *sens* dans lequel agit la composante. Ce signe n'est donc pas à rejeter.

Nous conviendrons de regarder comme positives les composantes qui seront dirigées suivant la partie mx de l'axe et comme négatives celles qui agiront dans le sens opposé. La même convention s'appliquera aux deux autres axes. D'après cela, chacun des produits

$$P\cos\alpha, \quad P\cos 6, \quad P\cos\gamma,$$

pris avec son signe, représentera à la fois la grandeur et

le sens de la composante correspondante. Cela posé, toutes les composantes

$$P\cos\alpha, \quad P'\cos\alpha', \quad P''\cos\alpha'', \ldots,$$

dirigées suivant mx (ou mx'), se composeront en une seule force (14) égale à leur somme algébrique, et que nous désignerons par X,

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots$$

ou, pour abréger l'écriture,

$$X = \sum P\cos\alpha;$$

et cette résultante partielle agira elle-même dans le sens mx ou dans le sens opposé, selon qu'elle sera positive ou négative. On aura de même, suivant l'axe yy', une résultante partielle

$$Y = \sum P\cos\beta, \quad \text{et, suivant } zz', \quad Z = \sum P\cos\gamma.$$

Toutes les forces seront ainsi réduites à trois X, Y, Z, dirigées suivant les axes.

Maintenant, on composera ces trois dernières forces en une seule R qui sera la résultante définitive, et dont la grandeur et la direction seront déterminées par les formules (25)

$$X = R\cos a, \quad Y = R\cos b, \quad Z = R\cos c.$$

Il n'y aura pas de signe à attribuer à la force R, qui doit être considérée comme une grandeur absolue. Mais les cosinus des angles a, b, c, qu'elle fera avec les parties mx, my, mz des axes, seront de mêmes signes que X, Y, Z; et par conséquent on saura si ces angles sont aigus ou obtus, ce qui ne laissera rien d'indéterminé sur la direction de la résultante.

27. *Projection de la résultante sur un axe.* — Comme

l'axe *mx* a été mené arbitrairement, la relation

$$R\cos a = \sum P\cos\alpha$$

nous donne ce théorème :

Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point, la projection de la résultante sur une droite quelconque est égale à la somme des projections des composantes; ou, ce qui revient au même (17), *la résultante estimée suivant une direction quelconque est égale à la somme des composantes estimées suivant la même direction.*

Enfin, si l'on se reporte au polygone des forces (21), on voit que cet énoncé peut se changer dans le suivant qui est purement géométrique :

La somme algébrique des projections des côtés d'un contour polygonal, plan ou gauche, sur un axe quelconque, est égale à la projection de la droite qui ferme le contour.

Nous rencontrerons, dans le cours de ces Leçons, plusieurs autres exemples de théorèmes de Géométrie démontrés par la Mécanique. Celui-ci est d'ailleurs susceptible d'une démonstration directe à laquelle nous ne nous arrêterons pas.

Remarquons encore que *si deux systèmes de forces appliquées à un même point admettent la même résultante, la somme des projections des forces du premier système sur un axe quelconque sera égale à la somme des projections des forces du second système sur le même axe :* car l'une ou l'autre somme sera égale à la projection de la résultante commune.

Cette dernière proposition comporte, comme la précédente, un énoncé purement géométrique.

28. *Développement de la condition générale d'équilibre.* — Revenons sur la condition d'équilibre déjà établie

synthétiquement (21). Nous pouvons maintenant l'exprimer en fonction des forces et des angles que leurs directions font avec trois axes.

En effet, pour qu'il y ait équilibre, c'est-à-dire pour que la résultante soit nulle, il faut et il suffit (23) que chacune des composantes X, Y, Z soit elle-même nulle. On aura donc

$$(1)\quad \sum P\cos\alpha = 0,\quad \sum P\cos\beta = 0,\quad \sum P\cos\gamma = 0.$$

Ainsi, *pour l'équilibre d'un système de forces appliquées à un point libre, il faut et il suffit que la somme des forces décomposées suivant trois axes rectangulaires soit égale à zéro* par rapport à chaque axe.

29. *Remarque.* — Nous avons supposé dans ce qui précède que les trois axes sur lesquels on projetait les forces étaient perpendiculaires entre eux. Mais il est bon de remarquer que les conditions d'équilibre n'impliquent pas nécessairement cette perpendicularité. Pour que l'équilibre existe, il est nécessaire et suffisant que la somme des projections des forces sur trois directions *formant un angle trièdre quelconque* soit nulle pour chacune de ces directions. Cela est *nécessaire;* car, s'il y a équilibre, la résultante est nulle, et, par suite, sa projection sur un axe quelconque l'est aussi. Or, on a vu (27) que cette projection est égale à la somme des projections des composantes. En second lieu, cela est *suffisant;* car, du moment que la projection de la résultante sur un axe est nulle, il arrive de deux choses l'une : ou que la résultante est nulle, ou qu'elle fait un angle droit avec l'axe de projection. Mais la résultante ne saurait être perpendiculaire à la fois aux trois arêtes d'un angle trièdre. Donc elle est nulle dans ce cas, et l'équilibre existe.

Quand les trois axes sont supposés rectangulaires, les *projections* des forces se confondent avec leurs *composantes* suivant les mêmes axes, en sorte qu'il est indifférent d'adopter l'un ou l'autre terme dans l'expression des conditions d'équilibre.

Quand les axes sont obliques, les composantes X, Y, Z de la

force P ne sont pas égales aux projections $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$. Ainsi, projections et composantes ne se confondent plus. Néanmoins, on peut encore dire que pour l'équilibre il faut et il suffit que *les sommes des composantes des forces suivant chaque axe soient égales à zéro*. Car ces sommes algébriques sont toujours égales respectivement aux composantes de la résultante suivant les mêmes axes; et, par suite, la résultante ne peut être nulle qu'autant que ces sommes sont elles-mêmes nulles. Ainsi les équations

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

bien que non identiques dans ce cas aux équations (1), constituent un système *équivalent*, en ce sens que l'un des deux entraîne l'autre.

EXERCICES.

I. Développer l'expression

$$\left(\sum P\cos\alpha\right)^2 + \left(\sum P\cos\beta\right)^2 + \left(\sum P\cos\gamma\right)^2,$$

qui représente (25) le carré de la résultante R d'un système de forces P, P′, P″,..., et faire voir qu'elle se réduit à

$$R^2 = \sum P^2 + 2\sum PP'\cos(P, P').$$

D'après cette formule, la grandeur de la résultante est indépendante de la direction des axes, ce que l'on pouvait prévoir.

II. Démontrer que l'angle de la résultante R avec l'une des forces P, P′, P″,... est donné par la formule

$$\cos(R, P) = \frac{P + P'\cos(P, P') + P''\cos(P, P'') + \dots}{R},$$

ce qui montre aussi que la direction de la résultante ne dépend pas de la direction des axes.

III. Faire voir que les conditions d'équilibre du n° 28 comprennent, comme cas particulier, celles du n° 24, relatives à trois forces.

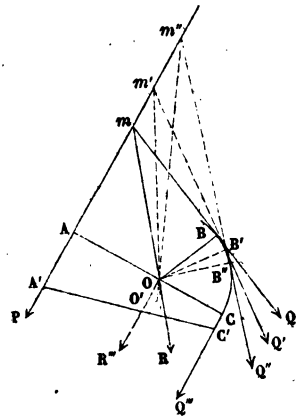
QUATRIÈME ET CINQUIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Composition de deux forces parallèles. — Couple. — Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — Centre des forces parallèles.

30. *Résultante de deux forces parallèles et de même sens, déduite du cas de deux forces concourantes.* — La composition de deux forces parallèles peut se déduire de celle de deux forces concourantes, en supposant que le point de concours s'éloigne à l'infini.

Soient P et Q deux forces appliquées à un point m (*fig.* 27); d'un point quelconque O, pris sur la résultante R,

Fig. 27.



abaissons les perpendiculaires OA, OB sur les directions des forces.

Nous avons vu (20) que les moments P.OA, Q.OB étaient égaux et de signes contraires; et réciproquement, que si cette égalité avait lieu, pour un point O pris dans le plan des forces, la résultante passait nécessairement par ce point.

Cela posé, regardons les forces P et Q comme appliquées aux points A et B, que nous supposerons liés invariablement au point *m*. La force P demeurant constante de grandeur et de position, concevons que l'angle AOB s'ouvre de plus en plus, de manière que la force Q prenne successivement les directions B′Q′, B″Q″,... tangentes à l'arc BC décrit du point O comme centre : le point de concours *m* des deux forces s'éloignera indéfiniment en *m′*, *m″*,..., sans que leur résultante cesse de passer par le point O. L'intensité de cette résultante, qui est donnée par la formule

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(P, Q)},$$

variera et se rapprochera de plus en plus de la somme P + Q, puisque l'angle (P, Q) tend vers zéro. A la limite, quand la force Q aura pris la position CQ‴ parallèle à la force P et de même sens qu'elle, la résultante passera toujours par le point O, sera parallèle aux composantes, de même sens qu'elles, et égale à leur somme P + Q. Or, ce point O divise la perpendiculaire commune AC en deux segments réciproquement proportionnels aux forces; car l'égalité P.OA = Q.OC équivaut à

$$\frac{P}{Q} = \frac{OC}{OA}.$$

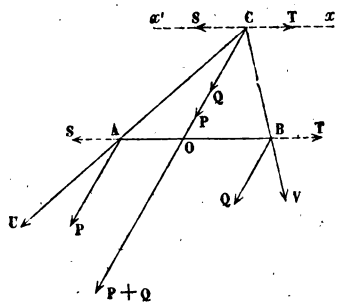
Ajoutons que toute autre droite A′C′, oblique aux forces, que l'on voudra considérer comme droite d'application, sera évidemment divisée par la résultante dans le même rapport.

Ainsi, on a ce théorème :

Deux forces parallèles et de même sens, appliquées à deux points liés invariablement entre eux, ont une résultante qui leur est parallèle, de même sens, égale à leur somme, et dont la direction partage la droite d'application en deux segments réciproquement proportionnels aux forces.

31. *Démonstration directe.* — Nous allons donner de ce théorème important une seconde démonstration qui ne repose pas sur la considération des limites. Considérons deux forces P, Q parallèles, de même sens, et appliquées à deux points matériels A et C, liés entre eux par une droite rigide et inextensible (*fig.* 28). Appliquons à ces deux points,

Fig. 28.



et suivant les prolongements de la droite, deux forces S, T, égales et contraires. Le système ne sera pas changé. Mais, si l'on compose, par la règle du parallélogramme, les forces (P, S), (Q, T), on aura deux nouvelles forces U, V qui remplaceront les forces primitives, et dont les directions concourront nécessairement en un certain point C. On pourra les appliquer à ce point, supposé lié à la droite AB; d'où l'on voit déjà (15) que les deux forces parallèles proposées admettent une résultante comprise dans l'angle ACB. Pour aller plus loin, redécomposons au point C les forces U et V, chacune en deux composantes parallèles à celles qui les ont produites. Il est évident que nous retrouverons, suivant la direction xx' parallèle à AB, les deux forces égales S et T qui se détruiront; et, suivant CO parallèle à AP, les deux forces égales P et Q qui s'ajouteront pour donner la résultante définitive $P + Q$.

Cette résultante va couper AB en un point O qu'il reste

à déterminer. Or, AC étant la direction de la résultante des forces P et S, considérées comme appliquées en C, le triangle AOC donne (15)

$$\frac{P}{S} = \frac{CO}{AO}.$$

De même, le triangle BOC donne

$$\frac{T}{Q} = \frac{BO}{CO}.$$

Multipliant membre à membre, et observant que $S = T$, il vient

$$\frac{P}{Q} = \frac{BO}{AO}.$$

Ainsi, nous retrouvons le théorème complet du numéro précédent.

32. *Remarques.*—I. La proportion qui définit le point O ne dépend que du *rapport des grandeurs* des forces P et Q. Il en résulte que si ces forces venaient à changer de direction, sans cesser d'être parallèles et appliquées aux mêmes points A et B, et si leurs grandeurs venaient à varier, en conservant le même rapport, la résultante ne cesserait pas de passer par le point O. Cette propriété remarquable, qui distingue le point O de tout autre point, lui a fait donner particulièrement le nom de *point d'application* de la résultante.

II. De la proportion

$$\frac{P}{Q} = \frac{BO}{AO},$$

combinée avec les relations

$$R = P + Q, \quad AB = AO + BO,$$

on tire

$$\frac{P}{BO} = \frac{Q}{AO} = \frac{R}{AB};$$

c'est-à-dire que *chacune des trois forces* P, Q, R *peut être*

représentée par la distance des points d'application des deux autres.

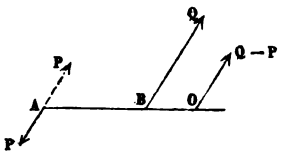
33. *Décomposition d'une force en deux autres parallèles à la première.* — Une force R, appliquée au point O d'un corps, étant donnée, on pourra la décomposer en deux autres parallèles à elle-même, de même sens qu'elle, et appliquées en deux points donnés, pourvu que ces deux points soient dans un même plan avec le point O, liés invariablement avec lui, et de côtés différents de la force R. En effet, on mènera par le point O une droite quelconque AOB qui rencontre les parallèles à la force R menées par les deux points donnés. Les inconnues de la question seront les grandeurs des forces P et Q dirigées suivant ces parallèles et immédiatement fournies par les relations ci-dessus.

On peut aussi décomposer la force R en deux autres qui lui soient parallèles, de même sens qu'elle, et dont l'une P soit donnée de grandeur et appliquée en un point donné A. L'autre composante sera $R - P$ (on suppose $P < R$), et son point d'application B sera situé sur le prolongement de la droite AO, à une distance BO fournie par l'équation

$$BO = \frac{P}{R - P} AO.$$

34. *Résultante de deux forces parallèles et de sens contraires.* — La démonstration du n° 31 peut s'appliquer directement au cas où les deux forces parallèles sont de sens contraires. Mais il est plus simple de ramener ce cas au précédent.

Fig. 29.



Soient P et Q deux forces parallèles et de sens contraires, appliquées aux points A et B (*fig* 29), et supposons que Q soit la plus grande.

D'après ce qui précède, nous pouvons décomposer Q en deux autres forces parallèles et de même sens, l'une égale à P appliquée en A, l'autre égale à Q — P appliquée en un point O, dont la position *sur le prolongement* de AB sera déterminée par la proportion

$$\frac{BO}{AB} = \frac{P}{Q-P}, \quad \text{d'où} \quad BO = \frac{P}{Q-P}AB.$$

Or les deux forces P appliquées au point A en sens contraires se détruisent. Il ne reste donc que la force Q — P, laquelle est la résultante cherchée. Remarquons enfin que la proportion précédente donne

$$\frac{BO}{AO} = \frac{P}{Q}.$$

Ainsi, *deux forces parallèles et de sens contraires ont une résultante qui leur est parallèle, dirigée dans le sens de la plus grande, égale à leur différence, et dont la direction rencontre le prolongement de la droite qui joint leurs points d'application en un point tel, que les distances à ces points sont réciproquement proportionnelles aux forces.*

En désignant par R la résultante Q — P, on a, comme dans le cas de deux forces parallèles et de même sens, la suite de rapports égaux

$$\frac{P}{BO} = \frac{Q}{AO} = \frac{R}{AB};$$

en sorte que chacune des trois forces peut encore être représentée par la distance des points d'application des deux autres.

35. *Du couple.* — Le cas de deux forces parallèles et de sens contraires présente une singularité remarquable, quand les deux forces sont égales. Reprenons les relations

$$BO = \frac{P}{Q-P}AB, \quad R = Q - P.$$

Si l'on suppose que la force Q, toujours supérieure à P, diminue de plus en plus, BO va en croissant et R en diminuant indéfiniment.

Le point d'application de la résultante s'éloigne donc de plus en plus, en même temps que la grandeur de cette force diminue. A la limite, lorsque $Q = P$, on a $BO = \infty$, et $R = 0$, ce qui montre l'impossibilité de trouver une résultante. Nous devons conclure de là que *deux forces égales, parallèles, de sens contraire, mais non directement opposées, n'ont pas de résultante.*

Ce résultat du calcul pouvait être prévu. En effet, admettons pour un moment que les deux forces égales P et Q aient une résultante R appliquée en un certain point C : prenons le point C′ symétrique de C par rapport au milieu de la droite d'application AB, et appliquons en ce point une force R′ égale et parallèle à R, mais de sens contraire. Il est évident que cette force R′ aura, à l'égard des forces Q et P, une position toute semblable à celle qu'a la force R à l'égard des forces P et Q. Donc, si R était résultante, R′ le serait aussi. Il y aurait donc deux résultantes distinctes, ce qui est impossible (11).

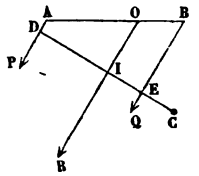
D'ailleurs, il est clair que le système des deux forces P et Q, égales et non directement opposées, n'est pas de lui-même en équilibre. Car si l'on vient à fixer le point A, ce qui détruira la force P, l'autre force aura évidemment pour effet (10) de mettre en mouvement la droite AB autour du point fixe.

M. Poinsot a donné à ce système de deux forces, irréductibles à une seule, le nom de *couple*. Il en a fait une étude approfondie et féconde. Nous renvoyons le lecteur, désireux de connaître la théorie des couples et ses remarquables conséquences, au *Traité de Statique* de cet illustre géomètre.

36. *Théorème des moments.* — Le théorème des mo-

ments, établi (19) pour le cas de deux forces appliquées à un même point, s'étend aisément au cas de deux forces parallèles. Soit C un point quelconque du plan des forces (*fig.* 30), par rapport auquel nous prendrons les moments.

Fig. 30.



De ce point, menons une perpendiculaire commune CED aux directions des forces, et désignons, pour abréger, par p, q, r les segments CD, CE, CI.

Puisque l'on a

$$P.AO = Q.OB,$$

on aura aussi

$$P.DI = Q.IE,$$

ou bien

$$P(p - r) = Q(r - q),$$

d'où l'on tire, en observant que $R = P + Q$,

$$Rr = Pp + Qq;$$

c'est le théorème des moments.

Nous avons supposé le point C *en dehors* des directions des deux forces. S'il est compris entre elles, on trouvera de même que l'on a

$$Rr = Pp - Qq \quad \text{ou} \quad Rr = Qq - Pp,$$

selon que le point C tombe entre la résultante et la force Q, ou entre la résultante et la force P.

Nous avons aussi supposé que les forces étaient de même sens. Dans le cas contraire, on verra que le moment de la résultante est encore égal à la somme (algébrique) des moments des composantes; le changement *de signe* d'un

moment correspond toujours, comme on l'a expliqué (20), à un changement *de sens* dans la rotation fictive que la force tend à produire autour d'un observateur qui serait placé au point C supposé fixe.

37. *Remarque sur les signes qu'il convient d'attribuer aux forces parallèles et aux perpendiculaires.* — Nous ferons observer qu'il se présente ici une circonstance particulière qui n'avait pas lieu dans le cas des forces concourantes. Un système de forces parallèles n'admet que *deux sens* diamétralement opposés : de même, les perpendiculaires abaissées du centre des moments sur les directions des forces n'admettent que *deux sens* contraires à partir de ce point. Les conventions ordinaires des signes sont donc applicables à ces deux ordres de grandeurs, comme dans la Géométrie analytique. Cela posé, on constatera aisément que l'équation

$$\mathrm{R}r = \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q$$

convient à tous les cas, pourvu que *forces et perpendiculaires portent leurs signes* respectifs, et qu'on applique à ces produits de deux facteurs les règles des signes de l'Algèbre.

Il n'en était pas de même dans le cas des forces concourantes. Les forces et les perpendiculaires, pouvant prendre toutes les directions imaginables, n'étaient pas susceptibles de signes. Aussi n'en avons-nous attribué qu'aux *moments*, c'est-à-dire aux *produits effectués* $\mathrm{P}p$, $\mathrm{Q}q$; et, à cet effet, nous avons introduit l'idée d'une rotation fictive, qui nous offrait l'avantage de ne pouvoir s'accomplir que dans *deux sens contraires* autour du centre des moments.

38. *Cas du couple.* — Dans le cas singulier du *couple*, la somme algébrique des moments des forces P, — P, par rapport à un point quelconque C du plan, se réduit au produit $\mathrm{P} \times \mathrm{AB}$ de l'une des forces par la perpendiculaire

commune. Cette somme est donc indépendante de la position qu'occupe le point C dans le plan.

39. *Résultante d'un nombre quelconque de forces situées dans un même plan. — Extension du théorème des moments.* — Quand on sait composer deux forces concourantes ou parallèles, il est facile de déterminer la résultante d'un système quelconque de forces situées dans un même plan; et l'on va voir que le théorème des moments s'étend à ce cas.

Parmi les forces données, on en choisit d'abord deux qui ne forment pas un couple (ce qui est toujours possible), et on les compose en une seule. Le système proposé est ainsi remplacé par un autre qui a une force de moins, et dans lequel la somme totale des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan n'a pas changé, puisque le moment de la résultante partielle est égal à la somme des moments des deux forces qu'elle remplace. Mais on peut répéter sur le nouveau système la même composition, c'est-à-dire le remplacer par un troisième, dans lequel il y aura encore une force de moins, sans que la somme des moments ait changé; et ainsi de suite. On parviendra ainsi toujours à réduire le système proposé à deux forces.

Maintenant, si ces dernières ne forment pas un couple, on les composera en une seule qui sera la résultante définitive, et le moment de cette résultante par rapport à un point quelconque du plan sera égal à la somme des moments de ses deux composantes, c'est-à-dire à la somme des moments des forces proposées. On a donc ce théorème général :

Le moment de la résultante d'un système de forces situées dans un même plan, par rapport à un point quelconque du plan, est égal à la somme (algébrique) *des moments des composantes.* On prendra avec le signe + les moments des forces qui tendent à faire tourner *leurs bras de levier* (20) dans un certain sens, de gauche à droite, par exemple, autour du centre des moments; et avec le signe — les moments des forces qui tendront à faire tourner en sens contraire. La résultante tendra à faire tourner son bras de levier dans le sens des forces qui donnent la plus grande somme de moments.

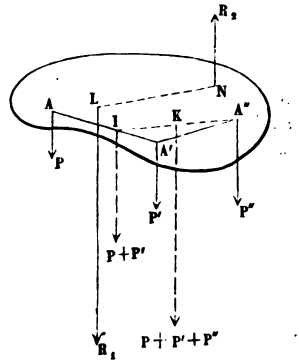
Dans le cas du couple, il n'y a plus de résultante unique, et

la somme algébrique des moments des forces a une valeur constante (38), quelle que soit la position du point pris pour centre des moments dans le plan des forces.

Le théorème des moments ainsi étendu fournit un nouveau moyen de déterminer la résultante d'un système quelconque de forces situées dans un même plan; car on peut avoir d'abord la grandeur et la direction de la résultante en transportant toutes les forces parallèlement à elles-mêmes en un même point et les y composant en une seule; puis le théorème des moments donne la distance de la résultante à un point fixe et le sens dans lequel elle agit, ce qui achève de déterminer cette force.

40. *Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — Centre des forces parallèles.* — Considérons enfin un système quelconque de forces parallèles, non situées dans un même plan et appliquées à divers points d'un corps solide (*fig.* 31). Parmi ces forces, les unes P, P′, P″,..., agissent dans un sens, les autres agissent dans le sens contraire. Si d'abord on s'occupe du premier groupe, on composera P avec P′, puis la résultante (P+P′) de ces deux forces avec une troisième P″, et ainsi de suite,

Fig. 31.



jusqu'à ce qu'on ait épuisé les forces de ce groupe. La figure indique les points d'application successifs I, K,...

de ces résultantes partielles : chacun d'eux divise la droite d'application des composantes en deux segments réciproquement proportionnels aux forces. Toutes les forces du premier groupe seront ainsi réduites à une seule R_1, parallèle à ces forces, égale à leur somme et appliquée en un certain point L qui sera déterminé par une suite de proportions.

On composera de même toutes les forces du second groupe en une seule R_2, qui leur sera parallèle, égale à leur somme et appliquée en un point N que l'on saura déterminer de la même manière.

Le système étant ainsi réduit à deux forces R_1, R_2, parallèles et de sens contraire, on composera finalement ces dernières en une seule qui sera égale à leur différence et agira dans le sens de la plus grande. Dans le cas où l'on aura $R_1 = R_2$, le système n'admettra plus de résultante unique; c'est le cas du *couple* déjà remarqué.

Concluons donc qu'*un système de forces parallèles, en tel nombre qu'on voudra, appliquées à différents points d'un corps solide, admet* (sauf le cas singulier du couple) *une résultante parallèle aux forces, égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens sur la somme de celles qui tirent en sens contraire, et agissant dans le sens de la plus grande somme.*

Le point d'application de cette résultante est déterminé par une suite de proportions qui ne dépendent que des positions des points d'application des forces et des rapports de grandeur qui existent entre elles. Il suit de là que, si toutes les forces venaient à tourner autour de leurs points d'application A, A′, A″,..., sans cesser d'être parallèles, et si leurs grandeurs venaient à varier sans cesser de conserver les mêmes rapports, leur résultante, qui changerait en même temps de grandeur et de direction, ne cesserait pas de passer par le même point O. Ce point remarquable a reçu le nom de *centre des forces parallèles*.

Ainsi, *le centre des forces parallèles est un point par lequel passe constamment la résultante du système de ces forces, lorsqu'elles viennent à changer de grandeur et de direction, tout en conservant leurs points d'application, leur parallélisme et leurs rapports de grandeurs.*

Quand les points d'application de toutes les forces parallèles sont sur une même droite, la composition successive de ces forces montre que leur centre est aussi sur cette droite. Pareillement, si tous les points d'application sont dans un même plan, on voit que le centre des forces parallèles est situé dans ce plan.

41. *Des moments des forces parallèles par rapport à un plan.* — Quand il s'agit d'un système de forces parallèles, on est conduit à faire usage d'une nouvelle espèce de moments. On appelle *moment d'une force par rapport à un plan* le produit de cette force par la distance de son point d'application à ce plan.

THÉORÈME. — *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme* (algébrique) *des moments des composantes.*

Ce théorème se déduit aisément de celui des moments par rapport à un point.

Considérons d'abord deux forces parallèles P, P′ de même sens ou de sens contraires, appliquées aux points A, A′ (*fig.* 32). Soient R leur résultante, O son point d'application, situé ou non entre A et A′; MN un plan quelconque par rapport auquel les trois points A, A′, O sont supposés *d'un même côté*; z, z', z_1 les distances de ces points à ce plan.

Si l'on prolonge AA′ jusqu'à sa rencontre en C avec le plan, et qu'on prenne les moments par rapport à ce point, on aura (36)

$$R.OC = P.AC + P'.A'C,$$

égalité où les forces pourront ne pas avoir le même signe,

mais où les trois distances OC, AC, A'C sont positives. Or, ces distances peuvent être remplacées par les ordonnées z_1, z, z' qui leur sont proportionnelles. Donc

$$Rz_1 = Pz + P'z'.$$

C'est le théorème cherché pour le cas de deux forces.

Cette démonstration suppose que AA' n'est pas parallèle au plan MN; mais dans le cas du parallélisme le théorème est évident, puisque les distances z, z', z_1 deviennent égales et que l'on a $R = P + P'$.

Maintenant, on passera au cas d'un nombre quelconque de forces parallèles P, P', P'',... ayant leurs points d'application toujours situés *d'un même côté du plan*. Il suffira de composer les forces deux à deux, comme on l'a fait (40), et d'appliquer à chaque résultante partielle le théorème précédent. En désignant par R la résultante définitive et par z_1 la distance du centre des forces parallèles au plan, on aura

$$(1) \qquad Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots.$$

Dans cette égalité, les forces doivent être regardées comme positives ou négatives, selon qu'elles tirent dans un sens ou dans le sens contraire, mais les distances z_1, z, z', z'',..., ont encore toutes le même signe.

Fig. 32.

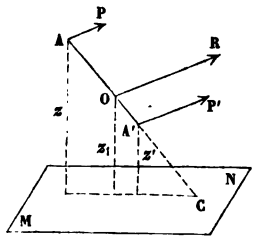
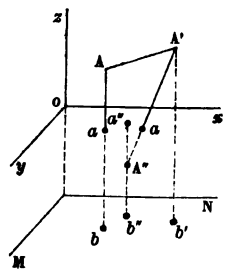


Fig. 33.



Il reste à lever cette restriction. Soit *xoy* un plan quelconque (*fig.* 33) par rapport auquel on veut prendre les

moments. Ce plan laisse des points tels que A, A′ au-dessus de lui, et d'autres tels que A″ au-dessous. Imaginons un plan MN, parallèle à xoy et distant de ce plan d'une quantité h assez grande pour laisser tous les points du système au-dessus de lui. L'équation (1) sera applicable à ce plan; et si l'on désigne par Z, Z′, Z″,... les perpendiculaires Ab, A′b', A″b'',..., abaissées des points A, A′, A″,... sur ce plan, on aura

$$RZ_1 = PZ + P'Z' + P''Z'' + \ldots;$$

mais on a l'identité

$$Rh = Ph + P'h + P''h + \ldots,$$

et, retranchant membre à membre, il vient

$$R(Z_1 - h) = P(Z - h) + P'(Z' - h) + P'' - h') + \ldots.$$

Or, si l'on convient de regarder comme positives les distances au plan xoy des points tels que A situés au-dessus de ce plan, comme négatives les distances des points tels que A″ situés au-dessous, et de désigner ces distances, *prises avec leurs signes,* par les minuscules z, z', z'',..., les relations évidentes

$$Aa = Ab - ab, \quad A''a'' = a''b'' - A''b'', \ldots$$

donnent

$$z = Z - h, \quad -z'' = h - Z'' \quad \text{ou} \quad z'' = Z'' - h, \ldots.$$

Par conséquent, l'équation précédente équivaut à

$$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots,$$

ce qui est le théorème des moments dans toute sa généralité.

42. *Application à la détermination du centre des forces parallèles.* — Quand on connaîtra les distances z, z', z'',... des points d'application de toutes les forces à un plan, l'équation précédente fera connaître la distance z_1

du centre des forces parallèles à ce plan,

$$z_1 = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + \dots}{P + P' + P'' + \dots}.$$

Si donc on prend successivement les moments par rapport à trois plans rectangulaires *xoy*, *xoz*, *yoz* (*fig.* 33), on aura, en grandeur et en signe, les distances du centre des forces parallèles à ces trois plans; et par suite ce point sera complétement déterminé dans l'espace.

43. *Centre des moyennes distances.* — Si toutes les forces sont égales et de même sens, on aura, en désignant leur nombre par n,

$$z_1 = \frac{P(z + z' + z'' + \dots)}{nP} = \frac{z + z' + z'' + \dots}{n}.$$

La distance du centre des forces parallèles à un plan quelconque est donc égale, dans ce cas, à la *moyenne distance* de tous les points d'application; et ce centre prend le nom de *centre des moyennes distances*.

En général, étant donné un système de points A, A′, A″, A‴,..., situés comme on voudra dans l'espace, on appelle *centre des moyennes distances du système* un point dont la distance à un plan quelconque est la moyenne entre les distances de tous ces points au même plan. (Il est entendu que les distances qui se rapportent à des points situés de côtés différents du plan sont prises avec des signes contraires.)

Ce centre peut se construire d'aprés la règle suivante, qui découle immédiatement de la composition d'un système de forces parallèles égales :

Joignez deux des points, A et A′, par exemple, et prenez AC, moitié de AA′; joignez C à un troisième point A″ et prenez CD, tiers de CA″; joignez D à un quatrième point A‴ et prenez DE, quart de DA‴; et ainsi de suite. Le dernier point de division ainsi obtenu sera le centre des moyennes distances.

Un système de points A, A′, A″, A‴,... *ne peut avoir qu'un*

centre de moyennes distances. En effet, il est inadmissible que deux points différents puissent être à la même distance de tous les plans imaginables. D'ailleurs, dès qu'un point est situé à des distances données de trois plans qui n'ont qu'un point de commun, sa position dans l'espace est complétement déterminée.

EXERCICES.

I. Des foyers d'une ellipse ou mène un couple de rayons vecteurs à un point de la courbe, et on applique aux milieux de ces rayons deux forces parallèles, de même sens et proportionnelles aux longueurs de ces rayons. On demande le lieu décrit par le point d'application de la résultante, lorsque le couple de rayons vecteurs parcourt l'ellipse. — Même question pour l'hyperbole, en renversant le sens de l'une des deux forces parallèles.

II. Une droite AB est partagée en n parties égales : on applique aux points de division des forces parallèles, de même sens et proportionnelles à leurs distances au point A. On propose de déterminer la distance au point A du centre de ces forces parallèles. — Limite vers laquelle tend cette distance quand n croît indéfiniment.

III. Démontrer que si des forces parallèles et de même sens p, p', p'',... sont appliquées à chacun des côtés d'un polygone plan ou gauche, en des points quelconques de ces côtés ou de leurs prolongements, et qu'on fasse parcourir à leurs points d'application, le long de ces côtés, simultanément et dans le même sens, des chemins l, l', l'',... tels, que chaque produit $p \times l$ soit proportionnel à la longueur du côté auquel la force est appliquée, le centre de ces forces parallèles demeurera immobile. — Cas où les forces sont supposées égales. — Cas où les chemins parcourus sont supposés égaux.

IV. Quand un système de points A, A′, A″, A‴,... est dans un même plan (ou sur une même droite), le centre des moyennes distances de tous ces points est aussi dans ce plan (ou sur cette droite). De plus, la distance de ce centre à une droite quelconque du plan (ou à un point quelconque de la droite) est moyenne entre les distances de tous les points à cette droite (ou à ce point).

V. Si l'on projette sur un plan (ou sur une droite) des points

A, A′, A″, A‴,..., ainsi que leur centre des moyennes distances, la projection de ce centre sera le centre des moyennes distances des projections de tous ces points sur ce plan (ou sur cette droite).

VI. Si l'on joint un point quelconque P de l'espace à chacun des points A, A′, A″, A‴,..., et à leur centre ω des moyennes distances, la projection de la droite Pω sur un axe quelconque sera moyenne entre les projections de toutes les droites PA, PA′, PA″, PA‴,... sur le même axe. — Cas où le point P se confond avec le centre ω.

VII. La résultante d'un système de n forces, appliquées à un point m et représentées par les longueurs mA, mA′, mA″,..., prises sur leurs directions, est dirigée suivant la droite $m\omega$ menée du point m au centre ω des moyennes distances des n points A, A′, A″,.... De plus, cette résultante est représentée par la longueur $m\omega$ multipliée par n.

SIXIÈME ET SEPTIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Centre de gravité. — Sa détermination dans quelques cas simples : triangle et pyramide.

44. *Pesanteur.* — Parmi les diverses causes de mouvement, nous avons déjà indiqué la *pesanteur* ou *gravité,* en vertu de laquelle on voit tous les corps tomber dès qu'ils sont librement abandonnés à eux-mêmes. Cette force résulte des attractions exercées par tous les points de la Terre sur les corps que l'on considère à sa surface, attractions dont l'effet est diminué par la force centrifuge qui provient du mouvement de rotation du sphéroïde terrestre.

L'observation montre que toutes les particules dans lesquelles on peut diviser un corps, quelque petites qu'elles soient, sont *pesantes,* et que dans leur chute elles prennent toutes une direction perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles. Cette direction se nomme *verticale.*

Lorsqu'un corps est suspendu à l'extrémité d'un fil suffisamment résistant, on observe non-seulement que ce fil prend une direction verticale, mais qu'il éprouve une *tension.* Mesurée au dynamomètre, cette tension est *continue* et *constante* dans le même lieu.

Des expériences, dont l'exposition appartient à un autre Cours, ont appris que l'intensité de la pesanteur varie, à la surface de la Terre, avec la latitude : elle augmente à mesure que l'on s'avance de l'équateur vers les pôles. Elle varie aussi, pour une même latitude, avec l'élévation du lieu au-dessus du niveau des mers, ou l'altitude. Mais ces variations sont insensibles tant que les déplacements ne sont pas très-grands relativement aux dimensions ordinaires des corps que l'on considère en Mécanique.

L'expérience journalière nous montre de plus que dans

toute l'étendue que notre vue peut embrasser, les verticales sont des droites parallèles. Cependant, la surface de la Terre, ou le prolongement du niveau des mers en équilibre, étant à peu près sphérique, les perpendiculaires à cette surface doivent converger sensiblement vers le centre du sphéroïde. Mais ce point de concours est comme infiniment éloigné par rapport aux distances des points matériels auxquels les forces que nous considérons sont appliquées.

45. *Poids. — Centre de gravité.* — Toutes ces données de l'expérience nous conduisent à regarder un corps pesant comme l'assemblage d'une infinité de molécules ou points matériels, tous sollicités par des forces verticales, parallèles, constantes, dont l'intensité est indépendante de la position que ces points occupent les uns par rapport aux autres.

Ces forces ont donc une résultante qui leur est parallèle et égale à leur somme. C'est le *poids* du corps. Ainsi se trouve complétée la notion que nous avions donnée du poids au début de ces Leçons.

On a pris pour unité le poids d'un centimètre cube d'eau distillée, au maximum de densité, c'est-à-dire à la température de 4 degrés centigrades. Ce poids a reçu le nom de *gramme;* mais l'unité de poids, usuelle en Mécanique, est, comme nous l'avons déjà dit, le kilogramme, auquel on rapporte toutes les autres forces.

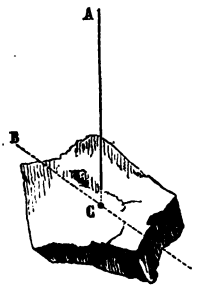
Il est bon de remarquer que, bien que le poids d'un même corps varie d'un lieu du globe à un autre, l'expression de ce poids en grammes ou kilogrammes est la même en tout lieu. Cela tient à ce que, en même temps que l'action de la pesanteur sur le corps à peser varie, elle varie aussi, et dans le même rapport, sur les grammes destinés à mesurer son poids.

Le centre des forces parallèles de la pesanteur prend le nom de *centre de gravité.*

Si l'on donne à un corps diverses positions par rapport à la verticale, sans changer sa figure, les forces de la pesanteur appliquées aux molécules seront dans les mêmes conditions que si elles tournaient autour de leurs points d'application, sans cesser d'être parallèles; et par conséquent (40), la position du centre de gravité par rapport aux différents points du corps ne changera pas. Ainsi, le centre de gravité d'un corps est un point de position invariable relativement aux molécules qui le composent, et par lequel passe constamment la direction du poids, quelque position que l'on donne au corps.

46. *Détermination expérimentale du centre de gravité.* — Le centre de gravité d'un corps solide, qui n'est soumis qu'à la seule action de la pesanteur, a une propriété caractéristique : c'est que, si ce point vient à être fixé, le corps sera en équilibre dans toutes les positions possibles autour de ce point. En effet, la résultante des forces de la pesanteur y passera toujours, et y sera détruite. Nous supposons, bien entendu, que le centre de gravité fasse partie de la matière même du corps pesant, ou qu'il lui soit invariablement lié.

Fig. 34.



Cette propriété fournit un moyen expérimental employé dans les arts mécaniques pour déterminer le centre de gravité des corps, quand leur figure est trop compliquée pour que les méthodes géométriques soient applicables.

Si l'on suspend le corps à un point fixe par une corde attachée à l'un des points de sa surface, la corde prendra, dans l'état d'équilibre, une direction verticale dont le prolongement passera nécessairement par le centre de gravité (*fig.* 34); car si cette condition n'était pas remplie, l'action de la pesanteur ne pourrait être détruite par la résistance du point fixe. Ainsi, le fil à plomb permettra de déterminer sur le corps la trace A*c* d'un plan vertical passant par le centre de gravité. En suspendant le corps par deux autres points de sa surface, on aura les traces de deux autres plans contenant le centre de gravité, et la détermination de ce point s'ensuivra. Au lieu de suspendre le corps à l'aide d'une corde, on préfère quelquefois le poser sur l'arête tranchante d'un corps fixe et chercher par tâtonnement la position d'équilibre. La difficulté inhérente à ces procédés est de suivre sur les faces, et surtout à l'intérieur du corps, les traces des plans verticaux dont l'intersection doit fournir le centre de gravité. Cependant ils s'appliquent bien à la détermination du centre de gravité d'un solide plat, tel qu'une lame ou une planche de figure quelconque. En tout cas, ils donnent, à défaut d'une détermination exacte, d'utiles indications sur la position du centre de gravité.

47. *Corps homogènes.* — Dans les corps homogènes, c'est-à-dire formés d'une même matière uniformément répandue dans toute l'étendue du volume, l'observation montre que des volumes égaux ont des poids égaux. Le poids d'une partie quelconque du corps est alors égal à son volume multiplié par un facteur constant qui est le *poids spécifique* de la substance. Ce facteur commun disparaît de lui-même de toutes les proportions, ou équations, que l'on pose pour déterminer le centre de gravité ; en sorte que *la recherche de ce centre ne dépend que de la figure* du corps et se réduit à une pure question de Géométrie.

Il n'en est plus de même dans les corps *hétérogènes*. Des volumes égaux ont généralement des poids différents. Il faut alors avoir égard, dans la recherche du centre de gravité, à la loi suivant laquelle le poids spécifique varie d'une molécule à une autre. Le problème devient plus complexe et sort du domaine des éléments de Mécanique. Nous ne nous occuperons donc que des corps homogènes, et même nous devrons nous borner à ceux que l'on considère dans la Géométrie élémentaire ; car la solution générale du problème exigerait l'emploi du calcul intégral.

48. *Ce qu'on appelle centre de gravité d'une surface, d'une ligne.* — Par extension d'idée, on attribue des centres de gravité aux surfaces et aux lignes, bien qu'elles n'aient ni matière ni poids. Ce qu'on appelle centre de gravité d'une surface, c'est le centre des forces parallèles qu'on imagine appliquées à tous les éléments de cette surface, de manière qu'à des aires équivalentes correspondent des résultantes égales. Le centre de gravité d'une ligne se définit de la même manière.

Nous verrons bientôt l'utilité de cette extension pour la détermination des centres de gravité des solides.

49. *Cas où le corps a un centre, ou un axe, ou un plan de symétrie.* — Quand un corps homogène, une surface, une ligne présentent un centre, ou un axe de symétrie, ou un plan de symétrie, le centre de gravité, dont la position ne dépend que de la figure, doit se trouver en ce point, ou sur cet axe, ou sur ce plan. Cela résulte clairement de la composition successive des forces.

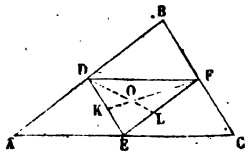
Ainsi le centre de gravité du volume ou de la surface d'une sphère, ou d'un ellipsoïde, est au centre de figure ; le centre de gravité d'un parallélipipède, au point d'intersection de ses diagonales ; celui d'un cylindre droit ou oblique, au milieu de la ligne qui joint les centres des deux bases ; celui

d'un anneau, au centre de cet anneau; celui d'un cercle, ou d'une ellipse, au centre de figure; celui d'un parallélogramme, au point d'intersection des deux diagonales; celui d'une droite, au milieu de sa longueur.

50. *Centre de gravité du contour d'un triangle.* — Le centre de gravité d'un contour polygonal s'obtiendra en composant deux à deux les forces parallèles qu'on imaginera appliquées aux milieux des côtés et proportionnelles à leurs longueurs.

Considérons en particulier le cas d'un contour triangulaire ABC (*fig.* 35). Soit L le point d'application de la résultante des deux forces parallèles appliquées aux milieux E, F des côtés AC, BC et proportionnelles à ces côtés : le centre de gravité du contour du triangle sera sur la droite DL qui joint le point L au milieu du troisième côté. Or, on reconnaît aisément que cette droite

Fig. 35.



est bissectrice de l'angle EDF; car on a (31)

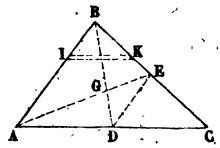
$$\frac{EL}{LF} = \frac{BC}{AC} = \frac{ED}{DF}.$$

Le centre de gravité n'est donc autre que le point d'intersection O des bissectrices du triangle EDF, c'est-à-dire *le centre du cercle inscrit au triangle formé en joignant les milieux des trois côtés du contour.*

51. *Centre de gravité de l'aire du triangle.* — Si l'on imagine que le triangle ABC (*fig.* 36) soit décomposé en tranches infiniment minces, telles que IK, parallèles à l'un des côtés, le centre de gravité de chacun de ces filets moléculaires sera au milieu de sa longueur; et la médiane BD, qui passe par tous ces points milieux, contiendra le centre

de gravité du système (40), c'est-à-dire celui du triangle. De même, le centre de gravité devra se trouver sur la médiane AE. Il sera donc à leur intersection G. Or les triangles

Fig. 36.



semblables ABG, DEG donnent

$$\frac{DG}{BG} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2};$$

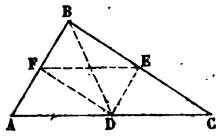
donc DG est le tiers de BD.

Ainsi, *le centre de gravité de l'aire du triangle coïncide avec le point d'intersection des trois médianes; et il est au tiers de chacune d'elles, à partir du côté auquel elle aboutit.*

52. *Autre démonstration.* — Si l'on ne veut pas faire usage de la décomposition en tranches infinitésimales, on peut recourir à la méthode des limites, combinée avec le théorème des moments.

Par le milieu D du côté AC (*fig.* 37), menons des parallèles DE, DF aux deux autres côtés. Le triangle sera ainsi décomposé en un parallélogramme BEDF et deux triangles égaux ADF, DEC.

Fig. 37.



Si l'on conçoit qu'aux centres de gravité de ces figures soient appliquées des forces parallèles et proportionnelles à leurs aires, l'aire du triangle total pourra être considérée comme une résul-

tante dont les aires du parallélogramme et des deux triangles partiels seront les composantes. Le moment de cette résultante, par rapport à un plan conduit suivant AC perpendiculairement au plan de la figure, sera égal à la somme des moments des composantes; et, dans l'expression de ces moments, il n'entrera que les *distances à la droite* AC. Si donc on désigne par x la distance inconnue du centre de gravité du triangle total à cette droite, et par x_1 la distance pareillement inconnue du centre de gravité de chaque triangle partiel à la même droite; par $4a$ l'aire du triangle total et par h sa hauteur, on aura, en observant que $\frac{h}{2}$ est évidemment la distance du centre de gravité du parallélogramme à AC,

$$4ax = 2a\frac{h}{2} + ax_1 + ax_1,$$

d'où

$$x = \frac{1}{4}h + \frac{x_1}{2}.$$

En appliquant au triangle partiel ADF la même décomposition, et désignant par x_2 la distance analogue à x_1, on aura de même

$$x_1 = \frac{1}{4}\frac{h}{2} + \frac{x_2}{2};$$

continuons indéfiniment les mêmes opérations, nous aurons

$$x_2 = \frac{1}{4}\frac{h}{2^2} + \frac{x_3}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{4}\frac{h}{2^{n-1}} + \frac{x_n}{2}.$$

D'où, par substitutions successives,

$$x = h\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right) + \frac{x_n}{2^n}.$$

Or, les inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ vont en décroissant et ont pour limite zéro; car elles sont respectivement moindres que les hauteurs des triangles partiels qui leur correspondent, et ces hauteurs

suivent la progression géométrique, décroissante à l'infini,

$$\frac{h}{2},\quad \frac{h}{2^2},\quad \frac{h}{2^3},\ldots,\quad \frac{h}{2^n}.$$

Donc, à la limite, on aura

$$x = h\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right),$$

ou

$$x = \frac{h}{3}.$$

Le centre de gravité du triangle ABC est donc distant, de chaque côté, d'une quantité égale au tiers de la hauteur du sommet opposé. D'où il est bien aisé de conclure qu'il se trouve sur la médiane, au tiers de cette droite à partir du côté.

53. *Corollaire.* — Le centre de gravité du triangle coïncide avec celui du système de trois sphères égales ou poids égaux, dont les centres de gravité seraient placés aux trois sommets A, B, C. Car, pour trouver le centre de gravité de ce système, on n'a qu'à composer d'abord deux des forces égales, appliquées en A et C par exemple, ce qui donne une force double appliquée au milieu D de AC; puis à composer celle-ci avec la troisième force appliquée en B, ce qui conduit à diviser BD en deux segments dans le rapport de 1 à 2.

Le centre de gravité d'un triangle est donc aussi (43) le centre des moyennes distances de ses trois sommets à un plan quelconque.

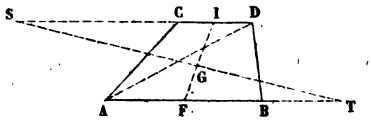
54. *Centre de gravité d'un polygone quelconque.* — Connaissant le centre de gravité du triangle, on saura déterminer celui d'un polygone quelconque, qui n'est autre chose qu'un assemblage de triangles. Il suffira d'imaginer qu'aux centres de gravité des triangles dans lesquels le polygone sera décomposé soient appliquées des forces parallèles, de même sens, et proportionnelles à leurs aires;

et l'on n'aura plus qu'à chercher le centre de ces forces parallèles, soit par la composition successive des forces, soit par le théorème des moments.

55. *Trapèze.* — *Quadrilatère.* — Les résultats simples auxquels on parvient, dans les cas du trapèze et du quadrilatère quelconque, méritent d'être remarqués.

Soit le trapèze ABCD. On voit d'abord, comme pour le triangle, que le centre de gravité est situé sur la ligne IF (*fig.* 38), qui

Fig. 38.



joint les milieux des deux bases. Il suffit donc de chercher dans quel rapport cette ligne est divisée par le centre de gravité.

Soient B, b les deux bases, h la hauteur du trapèze, x la distance du centre de gravité à la base B. La diagonale AD décompose le trapèze en deux triangles ABD, ACD dont les centres de gravité sont élevés au-dessus de AB des quantités $\frac{h}{3}$ et $\frac{2h}{3}$. Les aires de ces triangles et du trapèze sont proportionnelles à B, b, B + b. Si donc on prend les moments *par rapport à la droite* AB, comme on l'a déjà expliqué (52) pour le triangle, on aura

$$(B + b)\,x = (B + 2b)\,\frac{h}{3}.$$

Cette équation suffit pour déterminer x. Mais il vaut mieux la combiner avec celle que l'on obtient en cherchant la distance y du centre de gravité G à la petite base. Il suffit pour cela de changer B en b et x en y dans la précédente, ce qui donne

$$(B + b)\,y = (b + 2B)\,\frac{h}{3};$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{x}{y} = \frac{B + 2b}{b + 2B}.$$

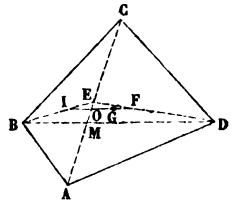
Ainsi, le centre de gravité du trapèze divise la ligne IF en deux segments qui sont entre eux comme la grande base augmentée du double de la petite est à la petite base augmentée du double de la grande.

De là cette construction : *On prolonge chaque base, en sens contraire, d'une longueur égale à l'autre; puis on joint les extrémités* T, S *de ces prolongements. Cette droite va couper la ligne qui joint les milieux des deux bases au centre de gravité cherché.*

On remarquera que le rapport des segments GF, GI est indépendant de la hauteur du trapèze.

Passons au quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 39). Le centre de gravité est situé sur la droite IF qui joint les centres de gravité des deux triangles dans lesquels le quadrilatère est décomposé par

Fig. 39.



la diagonale AC; et cette droite est parallèle à l'autre diagonale, puisqu'elle divise les médianes EB, ED chacune au tiers de leur longueur. La même construction, répétée sur les triangles BAD, BCD, dans lesquels le quadrilatère est décomposé par la diagonale BD, fournirait une seconde droite sur laquelle se trouverait le centre de gravité de la figure; et, par conséquent, ce point serait déterminé. Mais il y a une construction plus élégante. Le centre de gravité G doit diviser la droite IF en deux segments réciproquement proportionnels aux aires ABC, ACD, ou bien aux longueurs BM, MD. On doit donc avoir

$$\frac{FG}{IG} = \frac{BM}{MD};$$

mais on a aussi

$$\frac{IO}{OF} = \frac{BM}{MD}.$$

Donc

$$\frac{FG}{IG} = \frac{IO}{OF},$$

ou

$$\frac{FI}{FG} = \frac{FI}{IO},$$

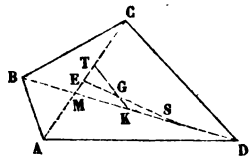
d'où

$$FG = IO.$$

De là cette construction : *On joint le milieu* E *de l'une des diagonales aux deux sommets opposés* B, D; *on prend sur* BE *un point* I *au tiers de cette ligne à partir du point* E, *et l'on tire* IF *parallèle à l'autre diagonale, qui rencontre la première en* O; *enfin on prend* FG = IO. G *est le centre de gravité cherché.*

Enfin, si l'on remarque que la droite EG prolongée (*fig.* 40) coupe BD en un point S tel, que DS = BM, on est conduit à cette

Fig. 40.



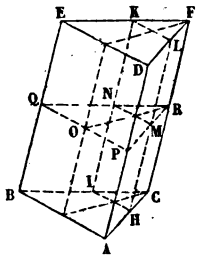
autre construction fort simple : *Tirez les deux diagonales qui se coupent au point* M; *prenez les milieux* E, K *de ces droites, et, sur ces mêmes droites, les points* T *et* S *tels, que* DS = BM *et* CT = AM. *Joignez* TK *et* SE, *et ces deux droites se rencontrent au centre de gravité cherché.*

Du quadrilatère on passerait au pentagone en décomposant cette figure en un quadrilatère et un triangle, et cela de deux manières différentes : on aurait ainsi deux droites sur lesquelles se trouverait le centre de gravité, etc.

56. *Centre de gravité du prisme triangulaire.* — Imaginons que le prisme triangulaire ABCDEF (*fig.* 41) soit décomposé en tranches infiniment minces, parallèles à l'une de ses faces latérales telles que HIKL : le centre de gravité

de ce parallélogramme matériel sera (49) au milieu de la droite MN, qui joint les milieux de deux côtés opposés; et le lieu des points milieux des droites telles que MN sera évidemment la médiane RO de la section triangulaire PQR menée à égales distances des deux bases du prisme.

Fig. 41.



Le centre de gravité du système de toutes ces tranches, ou le centre de gravité du prisme, est donc situé (40) sur cette médiane; et, par conséquent, il n'est autre (51) que le *centre de gravité de la section* PQR. D'où l'on conclut qu'*il est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

Il est bon de remarquer en même temps que le centre de gravité du prisme est distant de chaque face latérale d'une quantité égale au tiers de la distance de l'arête parallèle opposée.

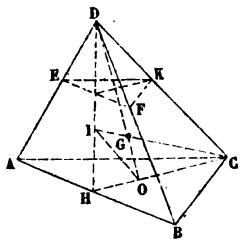
Corollaire. — Le centre de gravité d'un prisme triangulaire coïncide avec celui de six sphères égales, ou poids égaux, dont les centres de gravité seraient placés aux six sommets. Ce point est donc aussi le centre des moyennes distances des six sommets du prisme à un plan quelconque.

57. *Prisme quelconque.* — Tout prisme à base polygonale peut être décomposé par des plans diagonaux en prismes triangulaires. On est ainsi ramené à chercher le centre d'un système de forces parallèles qu'on imagine

appliquées aux centres de gravité des triangles dans lesquels se décompose la section faite à égale distance des bases, forces proportionnelles aux volumes de ces prismes triangulaires. Mais ces volumes sont eux-mêmes proportionnels aux aires des triangles qui leur correspondent. Le centre du système de ces forces parallèles n'est donc autre que le centre de gravité de l'aire du polygone de section. Ainsi, *le centre de gravité d'un prisme quelconque est le centre de gravité de la section faite à égale distance des deux bases*. On peut dire aussi que ce centre est situé au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des deux bases.

58. *Centre de gravité de la pyramide triangulaire.* — La décomposition de la pyramide en tranches infiniment minces, parallèles à l'une des faces, conduit, aussi aisément que pour le triangle, à son centre de gravité. En effet, le centre de gravité de chaque tranche matérielle EFK (*fig.* 42) peut être confondu avec celui du triangle qui lui sert de

Fig. 42.



base. Or, le lieu de tous ces points est la droite DO qui joint le sommet D au centre de gravité O du triangle ABC. Par conséquent, le centre de gravité de la pyramide est situé sur cette droite. Il est pareillement situé sur la droite CI qui joint le sommet C au centre de gravité I de la face ABD. Ces deux droites se coupent donc en un point G qui est le centre de gravité cherché. (D'ailleurs, on voit bien qu'elles

sont contenues dans le même plan DHC.) De plus, les triangles semblables donnent

$$\frac{GO}{DG} = \frac{OI}{DC} = \frac{OH}{HC} = \frac{1}{3},$$

d'où

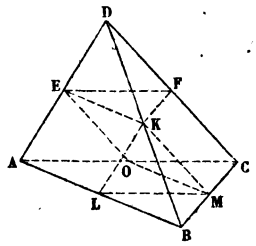
$$GO = \frac{1}{4} DO.$$

On a donc ce théorème : *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est situé sur la droite qui joint un sommet quelconque au centre de gravité de la face opposée, et au quart de cette ligne à partir de cette face.*

59. *Autre démonstration.* — Le théorème des moments peut encore s'appliquer à cette démonstration. On décompose la pyramide en quatre figures, deux pyramides égales et deux prismes triangulaires équivalents, à l'aide de trois plans menés par le milieu d'une arête.

La *fig.* 42 représente cette décomposition. Les trois plans menés par le milieu K de l'arête BD sont : KEF parallèle à la face ABC, KLM parallèle à la face ADC, et KEOM parallèle à l'arête DC.

Fig. 42.



Les quatre figures qui résultent de cette construction sont deux pyramides égales BLKM, DEKF, et deux prismes triangulaires équivalents MOCKEF, MKLOAE. Si l'on désigne par $8a$ le volume de la pyramide totale, a sera le volume de chaque pyramide partielle, et $3a$ le volume de chaque prisme. On prendra les

moments par rapport à la face ABC. Soient x, x_1 les distances du centre de gravité cherché et du centre de gravité de la pyramide BLKM à cette face, h la hauteur de la pyramide totale; on trouvera aisément

$$x = \frac{7}{32} h + \frac{x_1}{4}.$$

Les développements que nous avons donnés dans un calcul analogue (52) nous dispensent d'entrer dans plus de détails. Le résultat final est

$$x = \frac{h}{4},$$

d'où il est aisé de conclure le théorème énoncé.

60. *Corollaire.* — Le centre de gravité de la pyramide triangulaire coïncide avec celui de quatre sphères égales, ou poids égaux, dont les centres de gravité seraient placés aux quatre sommets (théorème dû à Roberval). En effet, si l'on cherche d'abord le centre de gravité du système de trois de ces corps placés aux sommets A, B, C, on trouvera (53) le centre de gravité de la face ABC; puis il faudra composer un poids triple appliqué en ce point, avec le poids simple appliqué au quatrième sommet C, ce qui conduira précisément à la construction du centre de gravité de la pyramide.

Il suit de là que le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est le centre des moyennes distances de ses quatre sommets à un plan quelconque.

61. *Remarques.* — I. Dans quelque ordre que l'on compose entre eux les quatre poids égaux appliqués aux sommets de la pyramide, on doit arriver au même résultat final. Or, si l'on commençait par composer les deux poids appliqués en A et B, puis les deux appliqués en C et D, on aurait deux poids doubles des précédents, appliqués aux

milieux des arêtes opposées AB, CD, lesquels se composeraient finalement en un seul appliqué au milieu de la droite qui joint leurs points d'application. Donc on peut dire encore que *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques*. Ceci fait voir, si on ne le savait déjà, que les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre concourent en un même point, distant de chaque face d'une quantité égale au quart de la hauteur du sommet opposé, et s'y divisent mutuellement en deux parties égales.

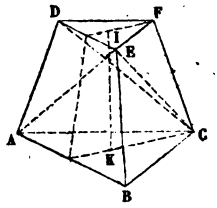
II. La propriété du centre des moyennes distances établie ci-dessus avait déjà été reconnue vraie pour le triangle et pour le prisme triangulaire. Elle est évidente pour le parallélogramme et pour le parallélipipède. Mais il faut se garder de la généraliser. Ainsi, elle n'est plus vraie pour un quadrilatère quelconque, ni même pour le trapèze : dans ce dernier cas, en effet, le centre des moyennes distances des quatre sommets est au milieu de la ligne qui joint les milieux des deux bases, tandis que l'on sait que le centre de gravité occupe sur cette ligne une position plus rapprochée de la grande base que de la petite.

62. *Pyramide quelconque.* — On démontrera, comme pour le prisme (57), que le centre de gravité d'une pyramide quelconque coïncide avec celui de la section parallèle à la base, menée à une distance de cette base égale au quart de la hauteur du sommet. Ce point est donc sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité du polygone de base, et au quart de cette ligne à partir de la base.

63. *Centre de gravité du tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles.* — La recherche de ce centre présente encore une intéressante application du théorème des moments. On reconnaît d'abord, comme pour la pyramide, que ce centre est situé sur la

ligne IK (*fig.* 44), qui joint les centres de gravité des deux bases : il suffit donc de chercher dans quel rapport cette ligne est divisée par le centre de gravité.

Fig. 44.



A cet effet, concevons le tronc décomposé en trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur h du tronc, et pour bases, l'une la base inférieure B, l'autre la base supérieure b, la troisième une moyenne proportionnelle entre les deux bases. Les volumes de ces trois pyramides et celui du tronc seront respectivement proportionnels à

$$\mathrm{B},\ b,\ \sqrt{\mathrm{B}b}\quad\text{et}\quad \mathrm{B}+b+\sqrt{\mathrm{B}b};$$

la distance du centre de gravité de la première pyramide au plan de la base B sera $\frac{h}{4}$; la distance du centre de gravité de la deuxième pyramide au même plan sera $\frac{3h}{4}$. Quant à la troisième pyramide, représentée sur la figure par EDAC, on ne voit pas immédiatement quelle est la distance de son centre de gravité à la base B. Mais, si l'on considère que cette distance doit être (60) la moyenne des distances des quatre sommets A, C, D, E, dont deux sont dans le plan de la base et les deux autres élevés au-dessus de ce plan de la quantité h, on en conclut qu'elle est égale à $\frac{2h}{4}$. Soit x la distance du centre de gravité du tronc à la base B. En prenant les moments des trois pyramides par rapport à ce plan, et égalant leur somme à celui du tronc, on aura l'équation

$$(\mathrm{B}+b+\sqrt{\mathrm{B}b})\,x=\frac{h}{4}(\mathrm{B}+3b+2\sqrt{\mathrm{B}b}),$$

qui est propre à déterminer x. Mais il vaut mieux la combiner avec celle qui détermine la distance y du centre de gravité cherché à la base b; il suffit de changer B en b et réciproquement, et l'on a

$$(B + b + \sqrt{Bb})\,y = \frac{h}{4}(b + 3B + 2\sqrt{Bb}).$$

Enfin, divisant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{x}{y} = \frac{B + 3b + 2\sqrt{Bb}}{b + 3B + 2\sqrt{Bb}}.$$

Tel est le rapport des segments dans lesquels la ligne IK est partagée par le centre de gravité.

Pour faciliter cette division, on remplacera les bases B, b par les carrés des côtés homologues AB, DE, qui leur sont proportionnels. Si l'on désigne ces côtés par L, l, on aura

$$\frac{x}{y} = \frac{L^2 + 3l^2 + 2Ll}{l^2 + 3L^2 + 2Ll}.$$

Ce résultat convient à un tronc de pyramide à bases parallèles quelconque. Il suffit, pour s'en convaincre, de décomposer le tronc de pyramide polygonale en troncs triangulaires par des plans diagonaux, et de remarquer que le rapport $\frac{x}{y}$ ne varie pas d'un tronc triangulaire à un autre; en sorte que les centres de gravité de tous ces troncs sont situés dans une même section plane parallèle aux bases, et ne sont autres que les centres de gravité des triangles mêmes dans lesquels cette section est décomposée. D'ailleurs, les volumes des troncs sont proportionnels aux aires de ces triangles. Donc le centre de gravité du tronc de pyramide polygonale coïncide avec le centre de gravité de la section, et se trouve sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases. Enfin il divisera cette droite dans le rapport marqué par la proportion établie ci-dessus, et où B et b désigneront les bases polygonales du tronc.

64. *Polyèdre quelconque. — Cylindre, cône et tronc de cône.* — Comme tout polyèdre peut se décomposer en

pyramides triangulaires, on saura déterminer le centre de gravité d'un polyèdre quelconque par la méthode qui a été exposée (54) pour le passage du triangle au polygone.

Le centre de gravité du polyèdre formé de l'assemblage de deux pyramides triangulaires s'obtiendra par une règle analogue à celle que nous avons donnée pour le quadrilatère quelconque (55). Nous laissons au lecteur ces exercices.

Les résultats obtenus plus haut pour les prismes, pyramides et troncs de pyramide, conviennent sans modification aux cylindres, cônes et troncs de cône, puisqu'on peut les considérer comme limites de polyèdres à faces infiniment petites.

65. Théorème de Leibnitz. — Nous terminerons cette théorie élémentaire des centres de gravité par la démonstration d'un théorème remarquable dû à Leibnitz : *Si l'on applique, au centre de gravité d'un système de poids égaux, des forces représentées en grandeur et en direction par les droites qui vont de ce centre aux centres de gravité des poids, ces forces se feront équilibre.*

En effet, soient A, A′, A″,... (*fig.* 45) les centres de gravité de poids égaux, dont p est la grandeur commune;

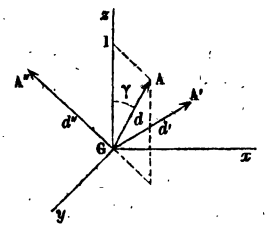
G le centre de gravité du système;

d, d', d'',..., les distances GA, GA′, GA″,...;

α, β, γ les angles que la direction GA fait avec trois axes rectangulaires Gx, Gy, Gz, menés à volonté par le point G;

α', β', γ' les angles analogues pour la direction GA′, etc.

Fig. 45.



La somme des moments des poids p par rapport au plan xGy

sera évidemment

$$pd\cos\gamma + pd'\cos\gamma' + pd''\cos\gamma'' + \ldots;$$

mais cette somme est nulle, car elle est égale au moment du poids résultant, appliqué au point G, et ce point est dans le plan xGy. Donc, en omettant le facteur commun p, on a

$$d\cos\gamma + d'\cos\gamma' + d''\cos\gamma'' + \ldots = 0,$$

ou, pour abréger,

$$\sum d\cos\gamma = 0.$$

On démontrerait de même que

$$\sum d\cos\beta = 0, \quad \text{et} \quad \sum d\cos\alpha = 0.$$

Or, ces trois équations sont précisément (28) celles qui expriment l'équilibre des forces d, d', d'', ..., dirigées suivant GA, GA', GA'', ...

Réciproquement, *si des forces en nombre quelconque se font équilibre sur un point, ce point est le centre de gravité du système de poids égaux dont les centres de gravité sont supposés placés aux extrémités des droites qui représentent ces forces en grandeur et en direction.*

Il suffirait, pour démontrer cette réciproque, de reprendre en sens inverse les équations qui ont servi à établir la proposition directe.

Les exercices VI et VII, proposés à la page 59, ont une analogie évidente avec ce théorème de Leibnitz.

Corollaires. — I. Il y a équilibre entre trois forces appliquées au centre de gravité d'un triangle, et représentées en grandeur et en direction par les droites qui vont de ce point aux trois sommets.

Et réciproquement, si trois forces sont en équilibre sur un point, ce point est le centre de gravité du triangle dont les sommets sont les extrémités des droites qui représentent ces forces en grandeur et en direction.

II. Il y a équilibre entre quatre forces appliquées au centre de

gravité d'une pyramide triangulaire, et représentées en grandeur et en direction par les droites qui vont de ce point aux quatre sommets.

Et réciproquement, si quatre forces sont en équilibre sur un point, etc.

III. Mêmes conclusions pour six forces appliquées au centre de gravité du prisme triangulaire et représentées par les droites qui vont de ce point aux six sommets.

IV. Si l'on suppose que toutes les molécules égales d'un corps homogène soient attirées vers son centre de gravité par des forces proportionnelles à leurs distances à ce centre, il y aura équilibre entre toutes ces forces.

EXERCICES.

I. Le centre de gravité de la surface d'une pyramide triangulaire est le centre de la sphère inscrite à la pyramide que l'on forme en joignant les centres de gravité des quatre faces de la pyramide proposée.

II. Si, par un sommet A d'un tétraèdre ABCD, on mène une droite AE égale et parallèle à l'arête CD et dirigée dans le même sens que cette arête considérée comme partant du sommet C, et que par l'extrémité E on mène une droite EH égale et parallèle à l'arête CB et de même sens qu'elle, la droite qui joindra le point C au point H passera par le centre de gravité du tétraèdre, et y sera divisée dans le rapport de 1 à 3.

III. Le volume d'un prisme (ou d'un cylindre) tronqué est égal au produit de sa base par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de la section inclinée sur le plan de cette base.

Ce volume a encore pour expression le produit de la section droite du prisme (ou cylindre) par la droite qui joint le centre de gravité de la base à celui de la section inclinée.

IV. *Théorème de Guldin.* — Le volume engendré par un polygone (ou une aire plane quelconque), tournant autour d'un axe situé dans son plan, est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.

V. Si l'on applique au centre de gravité d'un système de poids $p, p', p'', \ldots$ des forces dirigées suivant les droites qui vont de

ce centre aux centres de gravité des poids, et proportionnelles aux produits de ces poids par les longueurs des droites correspondantes, ces forces se font équilibre. (*Extension du théorème de Leibnitz.*) La réciproque est vraie.

VI. La somme des carrés des distances mutuelles des centres de gravité de m poids égaux est égale à m fois la somme des carrés de leurs distances au centre de gravité du système. — Application au cas de trois poids égaux (triangle) et de quatre poids égaux (pyramide triangulaire).

VII. Tracer dans l'intérieur d'un triangle deux droites telles, que chacune passe par les centres de gravité des deux segments du triangle déterminés par l'autre. — Combien existe-t-il de couples de droites jouissant de cette propriété?

VIII. Deux poids P et Q sont suspendus à deux cordons qui, après avoir passé sur deux *poulies de renvoi* A, B, se terminent à un nœud C où est suspendu un troisième poids R. Le plan ABC est vertical. — On demande quelle position il faut donner au point C, dans ce plan, pour que les trois poids se fassent équilibre (on néglige les poids des cordons).

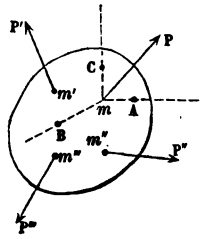
IX. Une tige homogène, dont la longueur est de 26 centimètres, porte à l'une de ses extrémités un anneau elliptique, creux, homogène, d'une épaisseur très-petite, dont le grand axe est dirigé suivant le prolongement de la tige. La longueur du grand axe est de 10 centimètres, celle du petit axe de 6 centimètres, et le rapport du poids de la tige à celui de l'anneau est égal à 5. Enfin un petit corps sphérique, dont le poids est le tiers de la somme des deux précédents, parcourt tout le circuit de l'anneau elliptique. — On demande le lieu décrit par le centre de gravité du système pendant le mouvement de la petite sphère.

HUITIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Composition d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide. — Leur réduction à deux forces, dont l'une est appliquée à un point pris à volonté. — Condition générale de l'équilibre.

66. *Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide. — Leur réduction à deux.* — Soient P, P′, P″,... des forces en nombre quelconque, appliquées à des points matériels m, m', m'',... (*fig.* 46),

Fig. 46.



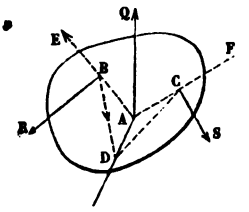
qui forment un système de figure invariable. Je prends arbitrairement trois points A, B, C, dans le corps (ou au dehors, pourvu qu'ils soient invariablement liés au corps), et je dis d'abord que toutes les forces sont réductibles à trois, appliquées à ces trois points.

En effet, la force P est décomposable, par la règle du parallélipipède, en trois autres dirigées suivant mA, mB, mC, et qu'on peut regarder comme appliquées aux points A, B, C. Cette décomposition étant répétée pour toutes les autres forces du système, on aura trois groupes de forces appliquées aux points A, B, C; et ces groupes se composeront chacun en une force unique.

Le système primitif sera donc remplacé par trois forces

Q, R, S appliquées aux trois points A, B, C (*fig.* 47). Maintenant, soit AD l'intersection des deux plans ABR, ACS (si ces plans se confondent, AD sera une droite quelconque tracée par le point A dans le plan commun); pre-

Fig. 47.



nons à volonté un point D sur cette droite, que nous supposerons invariablement lié au système.

Décomposons la force R en deux autres, dirigées suivant BD, BE, dont les points d'application peuvent être transportés respectivement en D et A, et la force S en deux autres dirigées suivant CD, CF, dont les points d'application sont également transportables en D et A.

Le point A est actuellement sollicité par trois forces, savoir : la force Q et les deux composantes de R et de S; et ces trois forces peuvent se réduire à une seule U. Le point D est sollicité par deux forces qui se composent aussi en une seule V.

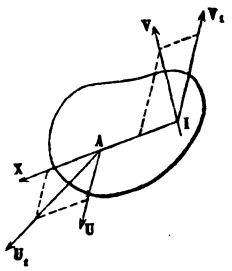
Le système est donc finalement remplacé par les deux forces U et V, dont l'une passe par le point A pris arbitrairement, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, *tout système de forces, appliquées à un corps solide, est réductible à deux, dont l'une passe par un point pris à volonté.* — Ce point peut être situé soit dans le corps, soit au dehors, pourvu qu'on le suppose invariablement lié au corps.

67. *De l'indétermination que présente cette réduction.*

— Il y a, dans cette réduction à deux forces, une indétermination nécessaire qu'il faut bien remarquer. Le système des deux forces U, V peut être remplacé par une infinité de systèmes équivalents, sans même déplacer le point A. En effet, si l'on se reporte à la démonstration précédente, on voit d'abord qu'en transportant le point D le long de AD, on fera varier les composantes qui sont appliquées en A et en D; et par suite les forces finales U et V changeront de grandeur et de direction. D'ailleurs, sans remonter à la démonstration, on n'a qu'à prendre, sur la direction de la force V, un point I à volonté (*fig.* 48), joindre AI et décomposer la force V en deux autres, l'une X *arbitraire*,

Fig. 48.



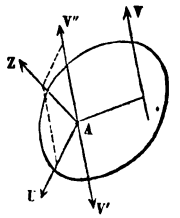
dirigée suivant IA, l'autre V_1 comprise dans le plan AIV et qui s'obtiendra par la règle du parallélogramme des forces. Maintenant la composante X et la force U, appliquées en A, se composeront en une seule U_1; et le système (U, V) sera remplacé par (U_1, V_1), sans que le corps ait cessé d'être sollicité de la même manière.

68. *Réduction du système à une force et à un couple.* — Le système (U, V) peut encore être remplacé par *une force* et *un couple*. C'est à ce dernier résultat que Poinsot parvient directement dans ses *Éléments de Statique*.

En effet, si l'on applique au point A (*fig.* 49) deux

forces contraires V′, V″, égales et parallèles à V, ce qui ne change rien à l'état du système, on peut composer les deux

Fig. 49.



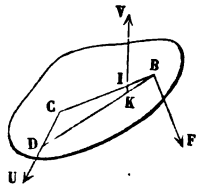
forces U et V″ en un seule Z, et les deux autres forment un couple (V, V′).

Ce qu'il y a de remarquable ici, c'est que *cette force* Z *est invariable de grandeur et de direction, quelle que soit la position du point* A. En effet, la projection de cette force sur un axe quelconque est indépendante de la position de ce point, puisqu'elle est égale (27) à la somme des projections des composantes U et V sur le même axe, laquelle est elle-même égale à la somme des projections des trois forces Q, R, S (*fig.* 47), et par suite à la somme des projections des forces proposées P, P′, P″,.... Il suit de là que, si par le point A on imagine trois axes rectangulaires, on aura la projection de la force Z sur chaque axe en faisant la somme des projections des forces proposées sur le même axe. Or, une droite est déterminée de grandeur et de direction dans l'espace, quand on connaît ses projections sur trois axes rectangulaires, puisqu'elle n'est autre que la diagonale du parallélipipède qui a ces projections pour côtés. Donc, quel que soit le point A, on trouvera la même force Z. De plus, on voit que cette force coïncidera toujours en grandeur et en direction avec la résultante qu'on obtiendrait si l'on transportait parallèlement à elles-mêmes toutes les forces P, P′, P″,... au point A, et qu'on les y composât en une seule.

69. *Condition pour que toutes les forces aient une résultante unique.* — S'il arrive que les deux forces U et V soient situées dans un même plan, et qu'elles n'y forment pas un couple, on pourra les composer en une seule; et, dans ce cas, toutes les forces P, P′, P″,... auront une résultante unique.

Mais quand les forces U et V ne seront pas situées dans un même plan, je dis qu'elles ne pourront avoir une résultante unique. En effet, j'admets pour un instant que cette résultante existe, et j'applique au système une force F égale et contraire (*fig.* 50). Il y aura équilibre entre les trois forces U, V. F. On ne troublera pas cet équilibre en fixant

Fig. 50.



à volonté un point C sur la direction de U et un point B sur la direction de F. Mais, par là, on détruit l'effet de ces deux forces; et il ne reste que la force V, dont l'effet ne saurait être nul qu'autant qu'elle rencontre l'*axe fixe* BC (*). Soit I ce point de rencontre. En fixant à volonté un autre point D sur la direction de la force U, on verrait de même que la force V doit rencontrer le nouvel axe BD en un point K. Cette force, ayant ainsi deux points dans le plan BCD, serait tout entière dans ce plan, lequel contient déjà évidemment la force U. Mais cette conclusion est en contradiction avec l'hypothèse que les forces U et V

(*) Nous reviendrons sur ce point, que l'on peut admettre ici comme évident, quand nous traiterons de l'équilibre d'un corps qui a la liberté de tourner autour d'un axe fixe (99).

ne sont pas dans le même plan. Donc il est impossible qu'il existe une résultante unique.

Ce raisonnement prouve en même temps que *trois forces appliquées à un corps solide ne peuvent se faire équilibre, si elles ne sont pas situées dans un même plan.*

En résumé, *pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide ait une résultante unique, il faut et il suffit que, si l'on réduit toutes ces forces à deux, ces dernières soient situées dans un même plan, et qu'elles n'y forment pas un couple.*

70. *Condition générale de l'équilibre d'un corps solide libre.* — Toutes les forces du système étant réduites à deux U, V, il faut et il suffit pour l'équilibre que ces deux forces soient égales et directement opposées. Cette condition est évidemment suffisante. De plus, elle est nécessaire; car si l'on fixe un point quelconque sur la direction de la force U, l'effet de cette force est détruit, et pour que l'effet de la force V soit également nul, il faut qu'elle passe aussi par le point fixe. Mais ce point est pris à volonté sur la force U. Donc les directions des deux forces se confondent. De plus, elles sont nécessairement égales et contraires, sans quoi elles auraient une résultante égale à leur somme algébrique et agissant dans le sens de la plus grande.

71. *Développement de cette condition générale.* — La condition générale d'équilibre que nous venons d'établir s'exprime, comme on va le voir, par six équations :

1° Les deux forces U et V devant être égales et contraires, si on les décompose chacune en trois autres, parallèlement à trois axes Ox, Oy, Oz, non compris dans un même plan, on devra trouver, suivant chaque axe, deux composantes égales et de sens contraires. La somme algébrique de ces composantes sera donc nulle. Or, cette somme est égale (68) à la somme des composantes de toutes les forces proposées suivant le même axe. Donc, si l'on désigne par X, Y, Z les trois composantes de la force P, lesquelles

sont positives ou négatives, ainsi qu'on l'a expliqué (26), et par $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$ des sommes de termes semblables étendues à toutes les forces du système, on aura ces trois premières équations :

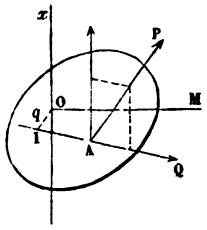
$$(1) \qquad \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0.$$

Elles sont nécessaires, mais *non suffisantes,* pour assurer l'équilibre du corps. En effet, ce qu'elles expriment, c'est que les deux forces U et V peuvent être représentées par les diagonales de deux parallélipipèdes dont les arêtes sont respectivement égales suivant chaque axe et dirigées en sens contraires. Ces forces sont donc dans l'espace, égales, parallèles et de sens contraires. Mais rien n'assure qu'elles soient *directement opposées :* elles peuvent former un couple, sans que les équations (1) cessent d'exister.

2° Il y a donc de nouvelles équations à établir. Mais quelques explications préliminaires sont nécessaires.

On appelle *moment d'une force par rapport à un axe* le produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe, multipliée par la plus courte distance de la force à l'axe. Ainsi, supposons que par un point A, pris à volonté sur la direction de la force P, on mène un plan AOM (*fig.* 51) perpendiculaire à

Fig. 51.



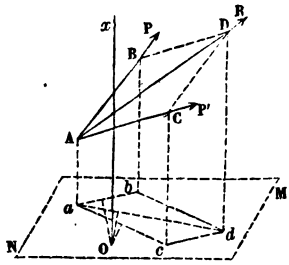
l'axe Ox, et qu'on décompose la force en deux, l'une parallèle à cet axe, l'autre Q située dans le plan AOM : cette dernière sera égale à la projection de la force P sur ce plan, et si du point O où l'axe le rencontre, on abaisse OI perpendiculaire sur AQ, OI sera (en grandeur) la plus courte distance de la force P à l'axe. Soit q

cette distance. Le produit Qq est ce qu'on appelle le moment de la force P par rapport à l'axe Ox.

Remarquons que ce moment ne peut être nul qu'autant que l'on a $Q = 0$, ou $q = 0$. Si $Q = 0$, la force P est parallèle à l'axe; et si $q = 0$, la force P va rencontrer l'axe. Dans les deux cas, *la force* P *est dans un même plan avec l'axe*, condition nécessaire et suffisante pour que son moment par rapport à l'axe soit nul.

Cela posé, le théorème de Varignon s'étend immédiatement à cette nouvelle espèce de moments. Soient P, P′ deux forces appliquées au point A (*fig.* 52), et représentées en grandeur et en

Fig. 52.



direction par AB, AC; R leur résultante représentée par la diagonale AD du parallélogramme ABDC; Ox l'axe par rapport auquel on doit prendre les moments; MN un plan perpendiculaire, qui coupe cet axe au point O. Le parallélogramme ABCD se projettera sur ce plan suivant un parallélogramme *abcd*, et par conséquent *la projection ad de la résultante* R *sera la résultante des projections ab*, *ac* des composantes P, P′. Le théorème des moments, *par rapport au point* O, aura lieu (19) pour ces projections. Or, ces moments ne sont autres que les moments des forces P, P′, R *par rapport à l'axe*. Donc, lorsque deux forces sont appliquées à un même point, le moment de leur résultante par rapport à un axe est égal à la somme des moments des composantes. On passe ensuite sans difficulté à un nombre quelconque de forces appliquées à un même point et dirigées comme on voudra dans l'espace Il suffit de les composer deux à deux.

Ainsi, *le moment de la résultante d'un système quelconque de*

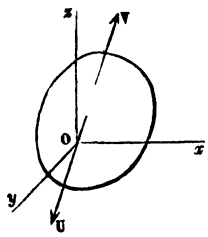
forces concourantes, par rapport à un axe, est égal à la somme des moments des composantes. Il est bien entendu qu'il s'agit ici d'une somme *algébrique*, ainsi qu'on l'a expliqué (20) : on imaginera un observateur le long de l'axe Ox, les pieds en O ; et selon que la projection d'une force P sur le plan MN tendra à faire tourner son bras de levier OI (*fig.* 51) de gauche à droite ou de droite à gauche pour cet observateur, on affectera son moment du signe + ou du signe —.

Maintenant, si l'on revient aux deux forces U et V auxquelles se réduit tout système de forces appliquées à un corps solide, on va voir que *la somme des moments de ces deux forces par rapport à un axe quelconque est égale à la somme des moments de toutes les forces primitives par rapport au même axe.*

En effet, la somme des moments des forces P, P′, P″,... (*fig.* 46) est d'abord égale, d'après ce qui vient d'être démontré, à la somme des moments des trois groupes de forces appliquées en A, B, C; celle-ci, pour la même raison, est égale à la somme des moments des trois forces Q, R, S (*fig.* 47, p. 84); et cette dernière est égale à la somme des moments des forces finales U et V.

Cela posé, plaçons (*fig.* 53) sur la direction de la force U l'origine O des trois axes Ox, Oy, Oz. Les moments de cette force

Fig. 53.



par rapport a chaque axe seront évidemment nuls. Mais, puisque la force V doit se confondre en direction avec la force U, les moments de V seront également nuls.

Donc aussi, la somme des moments de toutes les forces du système sera nulle par rapport à chacun des trois axes. Soient M_x, M_y, M_z les moments d'une force quelconque P; on aura les

trois équations

$$(2) \qquad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0.$$

Associées aux équations (1), elles complètent le développement de la condition générale d'équilibre.

Il reste à prouver que ces six équations sont suffisantes. Or il résulte, comme on l'a déjà vu, des équations (1), que les deux forces U et V, auxquelles le système primitif est réductible, sont *égales, parallèles et de sens contraires.* Il résulte maintenant des équations (2) que ces mêmes forces sont *directement opposées;* car elles expriment que la somme des moments des forces U et V par rapport à chacun des axes est nulle, et, en prenant pour origine un point O de U, cela revient à dire que les moments de V sont nuls. Donc V est dans un même plan avec chacun des trois axes qui se croisent au point O, et par conséquent passe par ce point. En définitive, les forces U et V sont égales et directement opposées. C. Q. F. D.

Concluons que *pour l'équilibre d'un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, et appliquées à un corps solide libre, il faut et il suffit :*

1° Que la somme des forces décomposées suivant trois axes non situés dans un même plan soit égale à zéro pour chacun de ces axes;

2° Que la somme des moments des forces par rapport à chacun de ces axes soit égale à zéro.

Du moment qu'on aura constaté que ces six conditions sont remplies pour un certain système d'axes connus, il y aura équilibre; et par suite, les mêmes conditions auront lieu pour tout autre système d'axes.

72. *Application des six équations d'équilibre à quelques cas particuliers.* — Les six équations précédentes comprennent évidemment celles que nous avions déjà trouvées (28), pour le cas où toutes les forces concourent en un même point. En effet, si l'on prend ce point pour origine des axes, les équations des moments disparaissent d'elles-mêmes, et il ne reste que les trois premières.

Nous nous bornerons à indiquer deux autres cas importants : celui des *forces parallèles* et celui des *forces situées dans un même plan*.

Forces parallèles. — Pour montrer comment les six équations de l'équilibre se réduisent et se simplifient, dans le cas des forces parallèles, on prendra l'un des axes, Oz, parallèle à la direction des forces, et les deux autres axes perpendiculaires à Oz, mais faisant entre eux un angle quelconque. On verra alors que les équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre se réduisent à trois, savoir :

La somme (algébrique) *des forces doit être nulle.*

La somme de leurs moments par rapport à deux plans qui se coupent suivant une ligne parallèle aux forces doit être nulle pour chacun de ces plans.

Forces situées dans un même plan. — On prendra ce plan pour celui des deux axes Ox, Oy, et on dirigera le troisième axe perpendiculairemant à ce plan. Les six équations générales se réduiront encore à trois, savoir :

La somme des forces décomposées suivant deux axes qui se coupent, et qui sont tracés à volonté dans le plan, doit être nulle pour chacun de ces axes.

La somme des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan doit être nulle.

EXERCICES.

Théorèmes. — I. Si, aux milieux des côtés d'un polygone plan quelconque, on applique, dans le plan de ce polygone, des forces proportionnelles aux longueurs de ces côtés, perpendiculaires à leurs directions, et dirigées toutes du dedans au dehors, ou toutes du dehors au dedans, ces forces se feront équilibre.

II. Ce théorème a son analogue dans les figures à trois dimensions : si, aux centres de gravité des aires des faces d'un polyèdre quelconque, on applique des forces proportionnelles à ces aires, perpendiculaires à leurs plans, et agissant toutes du dedans au dehors ou du dehors au dedans, ces forces se feront équilibre.

III. Un système de forces appliquées à un corps solide, et dirigées comme on voudra dans l'espace, est réductible d'une infi-

nité de manières à deux forces non situées dans un même plan et faisant entre elles un angle donné.

IV. Si l'on réduit toutes les forces appliquées à un corps solide à une force unique qui passe par un point donné et à un couple, on peut toujours choisir ce point de manière que la force soit perpendiculaire au plan du couple; et ce couple est tel, que le produit de l'une des forces égales qui le composent par la distance qui les sépare (autrement dit, *le moment du couple*) est *minimum*. (M. POINSOT.)

V. La pyramide triangulaire qui a pour sommets les extrémités des lignes qui représentent en grandeur et en direction les deux forces U et V, auxquelles peut se réduire tout système de forces, a un volume constant, quel que soit le point A choisi pour centre de réduction. (M. CHASLES.)

DEUXIÈME PARTIE.

DES MACHINES SIMPLES.

NEUVIÈME ET DIXIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Levier. — Condition générale d'équilibre du levier. — Relation entre la puissance et la résistance. — Des balances. — Balance ordinaire; balance romaine; bascule du commerce.

73. *Notions sur les machines à l'état de repos ou d'équilibre.* — Les machines sont des instruments au moyen desquels on peut faire équilibre à des *résistances* données, à l'aide de forces ou *puissances* qui ne sont ni égales ni directement opposées à ces résistances. A cet effet, les corps dont les machines se composent ne sont pas *libres*, mais *gênés dans leurs mouvements* par des obstacles fixes.

Une machine est dite *simple* quand elle est formée d'un seul corps solide; et selon que l'obstacle destiné à gêner son mouvement est

un *point fixe*, ou un *axe fixe*, ou un *plan fixe*,	elle prend le nom de	*levier*, *tour* ou *treuil*, *plan incliné*.

Nous ne nous occuperons que de ces trois machines simples, et de celles qui en dérivent immédiatement, telles que les balances et les poulies.

Une machine *composée* est un assemblage de machines simples, réagissant les unes sur les autres.

74. *Du levier.* — Le levier, dans son acception la plus générale, est un corps solide, de figure quelconque, mo-

bile en tous sens autour d'un point fixe. Mais le plus souvent on lui donne la forme d'une barre AOB droite ou courbe (*fig.* 54 et 55) qui ne se meut que dans un plan, autour d'un de ses points qu'on nomme *point d'appui*.

Fig. 54.

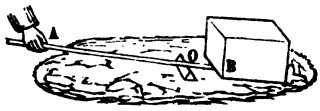
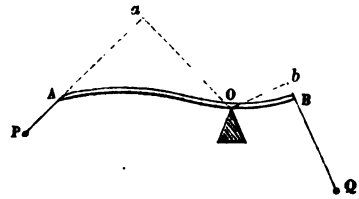
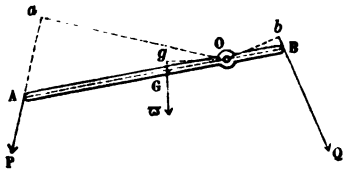


Fig. 55.



Cette dénomination provient de ce que la barre ne fait que *s'appuyer* en ce point contre l'arête d'un support inébranlable. Ou bien encore, la barre AOB est traversée en O (*fig.* 56) par un essieu fixe, de forme cylindrique; et, si l'on conçoit une section faite par un plan perpendiculaire

Fig. 56.



à l'axe de l'essieu, tous les points de la barre compris dans cette section sont dans le même cas que s'ils tournaient autour d'un point fixe, centre du cercle suivant lequel l'essieu est coupé par le plan.

Ordinairement, il n'y a que deux forces directement appliquées au levier : l'une P, force motrice dont on dispose, qu'on nomme la *puissance;* l'autre Q, *résistance* opposée par le corps que l'on veut déplacer. A ces deux forces il faut joindre le poids de la barre, à moins que,

dans la position d'équilibre, la verticale abaissée de son centre de gravité ne passe par le point d'appui, auquel cas le poids de la barre est évidemment détruit par la résistance de ce point.

75. *Condition générale d'équilibre.* — Quelle que soit la forme du levier, quel que soit le nombre des forces appliquées à cette machine, la condition d'équilibre peut s'exprimer de la même manière : *Il faut et il suffit que toutes les forces aient une résultante unique qui passe par le point d'appui.*

En effet, considérons un levier en équilibre sous l'action d'un nombre quelconque de forces. On sait qu'elles sont toutes réductibles à deux, U, V, dont l'une, U, passe par un point pris à volonté : choisissons le point fixe O. La force U sera détruite par la résistance de ce point, et, pour l'équilibre, il sera nécessaire et suffisant que l'autre, V, passe aussi par ce point. Donc les forces U et V pourront se composer en une seule qui passe par le point O, et cette résultante ne sera autre que celle de toutes les forces primitives.

On peut recourir à une autre forme de raisonnement, qui est fréquemment employée en Mécanique.

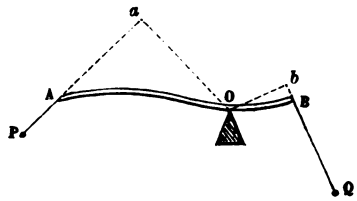
Dans l'état d'équilibre du levier, le point fixe O oppose aux forces qui sont en jeu une résistance de direction contraire au mouvement que ce point prendrait s'il cessait tout à coup d'être fixe. Désignons cette force par R et concevons qu'on l'applique au point O du levier; elle remplacera la fixité de ce point, et dès lors on pourra traiter le levier comme un corps *libre*, en équilibre sous l'action des forces primitives et de la force R. Cette dernière sera donc (7) égale et opposée à la résultante de toutes les autres. Donc celles-ci ont une résultante qui passe par le point fixe. C. Q. F. D.

Quand le levier ne fait que *poser* contre l'appui fixe,

sur lequel il a *la liberté de glisser,* la condition générale d'équilibre ne suffit plus : il faut y ajouter une condition particulière que nous établirons plus loin, à propos du *plan incliné* (113).

76. *Cas où le levier n'est sollicité que par deux forces, une puissance et une résistance.* — Soient P la puissance appliquée au point A (*fig.* 57) et Q la résistance appliquée au point B. Faisons abstraction du poids de la barre. Pour que les deux forces P, Q aient une résultante passant

Fig. 57.



par le point d'appui, il faut d'abord qu'elles soient dans un même plan avec ce point (69). En second lieu, les moments des deux forces par rapport à ce point devront être égaux et de signes contraires (20). Soient Oa, Ob les perpendiculaires abaissées du point O sur les directions des forces : en n'ayant égard qu'aux valeurs absolues des moments, on aura

$$P \times Oa = Q \times Ob \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{Ob}{Oa},$$

c'est-à-dire que les deux forces doivent être réciproquement proportionnelles à leurs distances au point d'appui. En résumé, quand le levier n'est sollicité que par deux forces, une puissance et une résistance, il faut et il suffit pour l'équilibre :

1° *Que la puissance et la résistance soient dans un même plan avec le point d'appui ;*

2° *Qu'elles soient réciproquement proportionnelles à*

leurs distances à ce point, et qu'elles tendent à faire tourner en sens contraires.

Remarque. — Il résulte de là que l'on peut, sans troubler l'équilibre du levier, changer à volonté la grandeur et la position de la puissance, pourvu que son moment par rapport au point d'appui ne change pas.

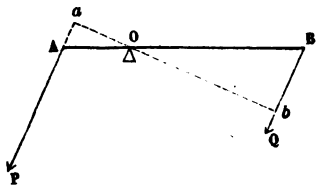
77. *Charge du point d'appui.* — La charge ou pression que supporte le point fixe est évidemment la résultante de toutes les forces qui sont appliquées au levier, résultante égale à celle qu'on obtiendrait en transportant toutes les forces parallèlement à elles-mêmes au point O.

Dans le cas de deux forces P, Q, on aura

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(P, Q)}.$$

78. *Leviers de différents genres.* — Si les deux forces sont parallèles et de même sens (*fig.* 58), l'angle $(P, Q) = 0$ et l'on a $R = P + Q$. Le point d'appui est alors situé entre

Fig. 58.



la puissance et la résistance, et la charge qu'il éprouve est à son maximum. Le levier est dit *du premier genre.* C'est le cas de la balance ordinaire, de la pince à talon des carriers, etc. Si de plus le levier est une barre droite, les perpendiculaires Oa, Ob sont proportionnelles aux segments OA, OB que l'on nomme ordinairement les *bras de levier;* et l'on peut dire que, dans l'état d'équilibre du levier droit, la puissance et la résistance sont en raison inverse de leurs bras de levier. Une très-faible puissance pourra donc tenir en équilibre une grande résistance, pourvu

qu'elle agisse à l'extrémité d'un bras de levier assez long. — Si les forces sont parallèles et de sens contraires, l'angle $(P, Q) = 180$ degrés et l'on a $R = \pm (P - Q)$. Le point d'appui laisse alors les deux forces d'un même côté (*fig.* 59 et 60). La charge est à son minimum. Si c'est

Fig. 59.

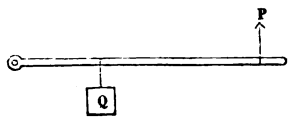
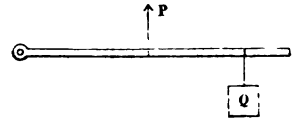


Fig. 60.



la résistance Q qui est la plus voisine du point d'appui, on a le levier *du second genre,* où la puissance a toujours de l'*avantage,* en ce sens qu'elle est inférieure à la résistance. Tel est le cas de la brouette. Si, au contraire, c'est la puissance P qui est plus rapprochée du point d'appui, on a le levier *du troisième genre,* où la puissance a toujours du *désavantage.* Mais ceci ne veut pas dire que ce genre de levier soit sans utilité. La pédale du rémouleur en offre un exemple. On le retrouve encore associé au levier du premier genre, dans la bascule du commerce, qui sera décrite plus loin.

79. *Cas général.* — Les conditions d'équilibre du levier sollicité par des forces quelconques s'expriment par les trois *équations des moments* du n° 71. En effet, toutes les forces étant supposées réduites à deux, U et V, dont l'une U passe par le point d'appui, les moments de U par rapport à chacun des trois axes qui ont ce point pour origine sont nuls d'eux-mêmes; et pour l'équilibre, il faut et il suffit (75) que les moments de V soient également nuls. Donc la somme des moments des forces U et V doit être nulle par rapport à chaque axe. Mais cette somme est la même que la somme des moments des forces primitives qui sollicitent le levier. Donc on a les trois équations

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0.$$

Ainsi, l'on voit que l'introduction d'un point fixe dans un système libre réduit de six à trois les équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre.

80. *Cas où les forces qui sollicitent le levier sont toutes situées dans un même plan.* — Quand le levier est sollicité par des forces en nombre quelconque, situées dans un même plan, il faut d'abord, pour qu'il puisse y avoir équilibre, que ce plan renferme le point d'appui ; de plus, il faut que le moment de la résultante par rapport à ce point soit nul. Cette condition s'exprime par une seule équation que fournit le théorème des moments (39). Soient P l'une quelconque des forces, p la distance du point d'appui à cette force; on aura pour équation d'équilibre

$$\sum \mathrm{P}p = 0$$

(la caractéristique $\sum$ désignant une somme *algébrique*).

Ce cas se présente souvent dans la pratique. Ainsi, supposons qu'on veuille soulever le corps pesant de la *fig.* 54, en exerçant un effort vertical à l'extrémité A de la barre AOB, et qu'on ait égard au poids de celle-ci. Soient AB = 2 mètres, OB = $0^{m},1$. Si la barre est homogène et d'égale épaisseur, son centre de gravité sera au milieu de sa longueur : nous supposerons son poids de 10 kilogrammes et le poids du bloc à soulever de 500 kilogrammes. L'effort P à exercer pour produire l'équilibre sera fourni par l'équation

$$\mathrm{P} \times 1,9 + 10 \times 0,9 = 500 \times 0,1,$$

d'où

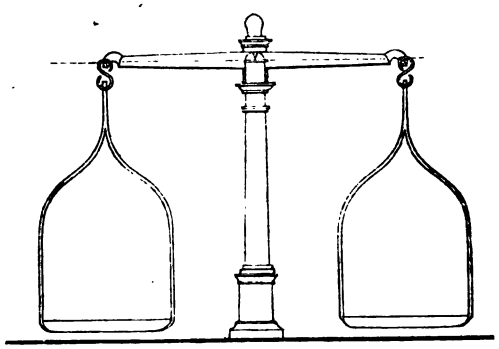
$$\mathrm{P} = 21^{kil},579 \text{ (par excès)}.$$

Ainsi, par l'intermédiaire de ce levier, il suffira que l'ouvrier exerce un effort de $21^{kil},579$ pour faire équilibre à un poids de 500 kilogrammes.

81. *Des balances.* — *Balance ordinaire.* — Les balances sont des instruments fondés sur le principe du levier, et destinés à *peser* les corps, c'est-à-dire à déterminer le rapport de leur poids au gramme.

La balance ordinaire est décrite, dans les cours de Physique, avec tous les détails que son mécanisme comporte. Elle se compose essentiellement d'un levier du premier genre, dit *fléau*, en fer ou en laiton, aux extrémités duquel sont suspendus deux plateaux destinés à recevoir, l'un le corps à peser, l'autre les multiples (ou sous-multiples) du gramme qui mesurent son poids (*fig.* 61). Ce fléau est

Fig. 61.



traversé en son milieu et perpendiculairement à sa longueur par un prisme d'acier trempé, dit *couteau,* qui fait saillie de part et d'autre, et repose par son arête inférieure sur deux petits plans d'agate ou d'acier enchâssés de niveau, l'un en avant, l'autre en arrière du fléau, dans la partie supérieure de la colonne qui supporte l'appareil. Cette arête vive fait ainsi fonction d'axe fixe, autour duquel le fléau peut librement osciller. Deux autres couteaux, adaptés aux extrémités du fléau, reçoivent sur leurs arêtes vives, tournées vers le haut, les crochets auxquels sont fixées les tiges ou chaînes de suspension des plateaux.

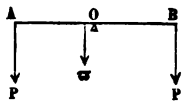
Il importe, comme on le verra ci-après, que la droite qui joint *les points de suspension* des plateaux (c'est-à-dire les deux points où les crochets s'appuient sur les couteaux) aille rencontrer l'axe de rotation du fléau. Nous admettrons que cette condition soit remplie. Dès lors, le fléau pourra être réduit à une droite idéale AOB (*fig.* 62), aux extrémités de laquelle seront appliquées deux forces verticales égales aux poids des plateaux et de leurs charges, et dont le milieu O sera considéré comme le point d'appui. Seulement, il faudra tenir compte du poids du fléau appliqué à son centre de gravité.

Une bonne balance doit réunir deux qualités : la *justesse* et la *sensibilité*.

82. *Justesse.* — Pour qu'une balance soit *juste,* il faut que deux poids égaux s'y fassent équilibre dans la position horizontale du fléau, *quelle que soit leur valeur commune.* Autrement, la balance ne saurait donner *en une seule pesée* le poids exact d'un corps. Développons cette condition.

Soient l, l' les longueurs des bras AO, OB (*fig.* 62), que nous ne supposons pas égaux *à priori;* P la valeur commune des poids de chacun des plateaux chargés, poids qu'on peut regarder comme directement appliqués aux points de suspension A et B; ϖ le poids du fléau et d la

Fig. 62.



distance de son centre de gravité à la verticale du point d'appui O. Le théorème des moments donne l'équation d'équilibre

$$P(l - l') \pm \varpi d = 0;$$

et comme elle doit être vérifiée quel que soit P, il en résulte

$$l = l' \quad \text{et} \quad d = 0.$$

Ainsi la justesse d'une balance exige :

1° *Que les deux bras du fléau soient égaux;*

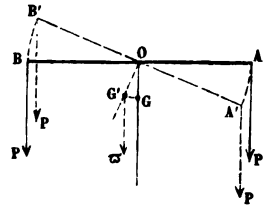
2° *Que la verticale de son centre de gravité passe par le point d'appui.*

83. *Position du centre de gravité par rapport au point d'appui.* — Le centre de gravité du fléau peut-il occuper telle position qu'on voudra sur la verticale du point O? Pour répondre à cette question, remarquons que si le fléau d'une balance en équilibre vient à être dérangé, par une cause quelconque, de la position horizontale, il est nécessaire qu'il tende à y revenir par une suite d'oscillations. En d'autres termes, l'équilibre doit être *stable*. Autrement l'instrument ne pourrait rendre aucun service. Il faut aussi que, dans le cas où les deux poids placés dans les plateaux ne sont pas égaux, l'inégalité s'accuse par une nouvelle position d'équilibre *stable,* inclinée à l'horizon.

Or, il est aisé de voir que cela ne peut avoir lieu qu'autant que le centre de gravité du fléau est situé *au-dessous* du point d'appui.

En effet, considérons d'abord le cas de deux poids égaux P placés dans les plateaux. Si l'on imprime au fléau un petit mouvement qui le place dans la position inclinée A′B′ (*fig.* 63), il est clair que la résultante de deux forces P,

Fig. 63.

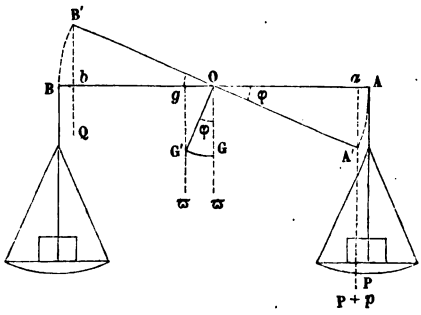


égales et parallèles, appliquées aux points A′ et B′, ne ces-

sera pas de passer au point milieu O, et par conséquent sera toujours détruite par la fixité de ce point. Mais le centre de gravité G, que nous supposons *au-dessous* de O, aura passé en G′, du côté de la verticale opposé au bras de levier qui plonge au-dessous de l'horizon. Le poids ϖ du fléau, appliqué à ce point, tendra donc à le faire tourner dans un sens contraire au mouvement imprimé, c'est-à-dire à le ramener vers la position horizontale. Le fléau atteindra cette position avec une vitesse acquise en vertu de laquelle il la dépassera; mais en même temps le poids ϖ, passant de la gauche à la droite de la verticale OG, tendra de nouveau à ramener le fléau à l'horizon. Il en résultera une série d'oscillations que les frottements et la résistance de l'air finiront par rendre insensibles. L'équilibre sera donc stable.

Supposons maintenant que le poids appliqué en A soit $P+p$, tandis que le poids appliqué en B reste égal à P (*fig.* 64). Sous l'influence de l'excès p, le bras OA va

Fig. 64.



s'abaisser, et je dis que le fléau tendra vers une position d'équilibre stable, telle que A′B′. En effet, à mesure que l'inclinaison du fléau augmente, le moment du poids p, $(p.Oa)$, va continuellement en diminuant jusqu'à zéro, tandis que celui du poids ϖ, $(\varpi.Og)$, va continuellement en croissant

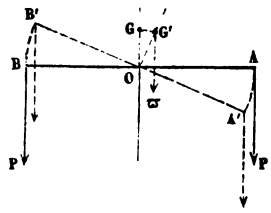
à partir de zéro. Il y a donc un certain angle φ, et un seul, pour lequel ces moments deviennent égaux. D'ailleurs, les deux poids égaux P n'interviennent en rien dans l'équation d'équilibre, puisque leur résultante passe toujours au point d'appui. Ainsi l'équation nécessaire et suffisante pour l'équilibre sera

$$p.Oa = \varpi.Og,$$

et cet équilibre sera stable, puisque le fléau, s'il atteint et dépasse cette position, y sera évidemment ramené par l'action prépondérante du poids ϖ.

Mais il en serait tout autrement, si le centre de gravité du fléau était situé *au-dessus* du point d'appui, comme dans la *fig.* 65. L'horizontale AB serait alors une position d'équilibre *instable;* pour peu qu'on dérangeât le levier AB

Fig. 65.



de cette position, il *ferait la bascule* sans pouvoir se relever, puisque le poids ϖ, appliqué en G′, passerait du côté même de la verticale où se trouve déjà le bras OA′ incliné au-dessous de l'horizon, et par conséquent concourrait à accroître cette inclinaison. La position horizontale AB serait même impossible à maintenir physiquement. Une telle balance est dite *folle.* On ne peut non plus supposer que le centre de gravité G soit placé *au point d'appui même;* car alors deux poids égaux se feraient équilibre dans toutes les positions du fléau : et, de cet état d'équilibre *indifférent,* la balance passerait subitement à un renversement

complet dès qu'il y aurait la moindre différence entre les deux poids. Elle serait hors d'usage.

Concluons donc que le fléau d'une balance doit toujours être construit de telle sorte que son centre de gravité tombe au-dessous du plan horizontal passant par l'axe de rotation.

84. *Sensibilité.* — Il ne suffit pas qu'une balance soit juste, il faut encore qu'elle soit *sensible*, c'est-à-dire qu'une petite différence p entre les deux poids placés dans les plateaux se manifeste par une inclinaison notable du fléau. De l'équation d'équilibre du numéro précédent,

$$p.\mathrm{O}a = \varpi.\mathrm{O}g,$$

on déduit aisément les conditions de sensibilité de la balance.

Soient φ l'inclinaison AOA′, l la longueur du bras OA = OB, h la distance OG (*fig.* 64); on a

$$\mathrm{O}a = l\cos\varphi, \quad \mathrm{O}g = h\sin\varphi,$$

et, substituant dans l'équation précédente, il vient

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{pl}{\varpi h}.$$

Le poids additionnel p étant supposé très-petit, l'angle φ l'est aussi et peut être regardé comme proportionnel à sa tangente. La formule ci-dessus montre donc que la balance sera d'autant plus sensible, *que le centre de gravité sera plus voisin de l'axe de rotation, et que le fléau sera plus long et plus léger.*

Dans les balances de précision, qu'un milligramme doit faire trébucher, sous une charge de plusieurs kilogrammes, le constructeur a soin de fixer au milieu du fléau une petite tige verticale taraudée, sur laquelle on peut faire monter ou descendre un écrou de dimensions varia-

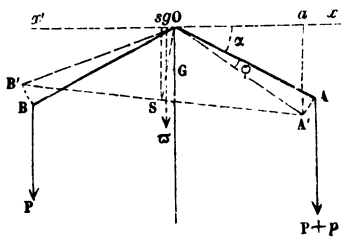
bles. De cette manière, on est maître de déplacer légèrement le centre de gravité du fléau et de régler la sensibilité.

85. *Examen du cas où les points de suspension des plateaux et le point d'appui du fléau ne sont pas en ligne droite.* — Dans tout ce qui précède, nous avons admis que les points de suspension des plateaux étaient en ligne droite avec le point d'appui du fléau.

D'après la valeur trouvée pour $\tang\varphi$, on voit que l'inclinaison du fléau qui répond à un excès de poids p placé dans l'un des plateaux dépend de cet *excès* seulement et non de la *grandeur absolue de la charge* que les plateaux supportent.

Il n'en serait plus de même si le point d'appui et les points de suspension des plateaux cessaient d'être en ligne droite. Supposons un levier coudé AOB à bras égaux (*fig.* 66). Soit α l'angle $AOx = BOx'$, que chaque bras fait avec l'horizontale du point d'appui, quand le levier est en équilibre sous l'action de deux poids égaux P. Soit φ l'angle AOA′ dont le fléau va tourner par l'effet d'un poids additionnel p suspendu au point A. Les deux

Fig. 66.



poids égaux P se composent en un seul 2P appliqué au point S milieu de la droite qui joint A′ à B′, et le moment de ce poids résultant $(2P.Os)$ n'est plus nul comme dans le cas où les trois points A′, O, B′ étaient en ligne droite. L'équation d'équilibre se complique donc de ce terme, et devient

$$p.Oa = \varpi.Og + 2P.Os,$$

ou bien, en conservant les notations du numéro précédent,

$$pl\cos(\alpha+\varphi) = \varpi h\sin\varphi + 2Pl\sin\alpha\sin\varphi,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{pl\cos\alpha}{(2P+p)\,l\sin\alpha + \varpi h}.$$

Cette formule montre que l'angle φ *dépend* maintenant *de la charge* $2P$, et que, toutes choses égales d'ailleurs, il diminue quand elle augmente. Ainsi la balance sera d'autant moins sensible que les plateaux seront plus chargés. Ce grave inconvénient disparaît quand les trois points A, O, B sont en ligne droite. L'angle α devient alors nul, et l'expression de $\operatorname{tang}\varphi$ se réduit à celle que nous avons donnée dans le n° 84.

La *fig.* 66 suppose les points de suspension A et B *au-dessous* de l'horizontale xOx'. S'ils étaient *au-dessus*, l'expression de $\operatorname{tang}\varphi$ subsisterait encore, à la condition de changer α en $-\alpha$. Dans ce cas, une charge $2P$, de plus en plus grande, fera passer le dénominateur par zéro, et la balance deviendra folle. Du reste, sans recourir au calcul, on voit qu'alors la charge $2P$ concourt avec le poids additionnel p pour faire trébucher le fléau.

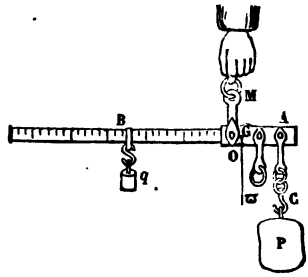
86. *Méthode des doubles pesées.* — Nous avons séparé les conditions de justesse de celles qui règlent la sensibilité : si une balance n'a pas ses bras égaux, elle n'est pas *juste;* et cependant, pourvu qu'elle demeure *sensible,* elle peut encore servir à déterminer le poids exact d'un corps. Seulement ce n'est plus *par une seule pesée* que ce résultat peut être atteint. On a recours a un procédé aussi simple qu'ingénieux, imaginé par Borda. On équilibre d'abord le corps à peser, placé dans un des plateaux, avec de la grenaille de plomb ou du sable que l'on met dans l'autre. Puis on enlève le corps, et on le remplace par des poids marqués, en quantité suffisante pour rétablir l'équilibre. La somme de ces poids est exactement égale au poids du corps, puisque l'un et l'autre font, dans des circonstances identiques, équilibre à la même quantité de matière pondérable.

Le physicien et le chimiste font toujours usage de cette méthode quand il s'agit de pesées délicates, même avec des

balances très-bien construites; car l'égalité parfaite des deux bras est impossible à obtenir dans la pratique.

87. *Romaine.* — La balance romaine est encore un levier droit du premier genre, mais à bras inégaux. On suspend à l'extrémité A du petit bras (*fig.* 67), soit avec un

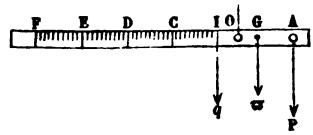
Fig. 67.



crochet, soit à l'aide d'un plateau, le corps à peser P. Le long du grand bras est mobile un anneau B qui supporte un poids invariable q. On détermine par tâtonnement le point où il faut arrêter cet anneau pour que le levier prenne la position horizontale d'équilibre. Cet instrument n'exige pas l'emploi de poids marqués : il suffit que la partie du levier que le poids mobile doit parcourir ait été *graduée* d'avance, de manière qu'on puisse lire, en chaque point où s'arrêtera le curseur, le nombre de grammes ou kilogrammes qui représente le poids cherché.

88. *Graduation de la romaine.* — Aucun corps n'étant d'abord suspendu au crochet, soit I le point où il faut amener le curseur pour que le fléau se tienne horizontal

Fig. 68.



(*fig.* 68). Dans cette position, il y a équilibre entre le

poids q et le poids ϖ de la romaine appliqué à son centre de gravité G, et l'on a

$$q.\mathrm{OI} = \varpi.\mathrm{OG}.$$

Ce point I peut d'ailleurs être situé indifféremment à droite ou à gauche du point d'appui O.

Suspendons maintenant un poids P au crochet A : l'équilibre sera détruit; et, pour le rétablir, on devra transporter le curseur, du point I à un certain point C tel que l'on ait

$$\mathrm{P}.\mathrm{AO} + \varpi.\mathrm{OG} = q.\mathrm{OC}.$$

Le terme $\varpi.\mathrm{OG}$ peut être remplacé par son égal $q.\mathrm{OI}$, et si l'on remarque que $\mathrm{OC} - \mathrm{OI} = \mathrm{IC}$, l'équation précédente devient

$$\mathrm{P}.\mathrm{AO} = q.\mathrm{IC}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{IC} = \frac{\mathrm{P}.\mathrm{AO}}{q}.$$

Ainsi, *la distance* IC *varie proportionnellement au poids* P. D'après cela, pour graduer l'instrument, on marquera d'abord zéro au point I; puis, suspendant au point A le poids que l'on veut prendre pour unité, 1 kilogramme par exemple, on cherchera le point C où il faut amener le curseur pour rétablir l'équilibre. On marquera 1 en ce point. Portant ensuite sur toute la longueur du fléau des distances CD, DE, EF,... égales à IC, on inscrira les nombres 2, 3, 4,... aux points D, E, F,.... Pour estimer des dixièmes de kilogramme, on n'aura qu'à diviser ces longueurs en dix parties égales, et ainsi de suite.

On voit que la graduation n'exige pas que l'on connaisse *à priori* la distance OG, ni le poids ϖ de la romaine. Ces quantités ne figurent que dans la démonstration.

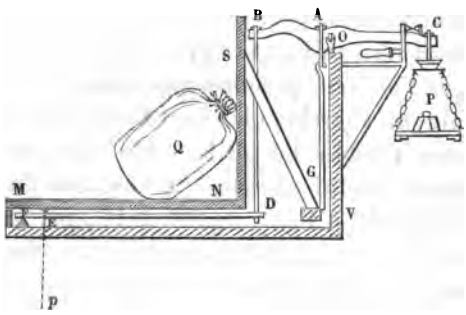
Cette balance est d'un fréquent usage dans le commerce, pour les pesées qui ne demandent pas beaucoup de précision. Afin d'éviter de donner au grand bras des dimensions trop étendues, on adapte souvent au fléau deux anneaux de suspension (*fig.* 67) : l'un, le plus éloigné du crochet A,

sert pour les corps dont le poids est peu considérable et auxquels il n'est pas nécessaire de donner un petit bras de levier; l'autre est employé pour peser les corps plus lourds.

89. *Bascule du commerce.* — Cet instrument, qu'on appelle encore *balance de Quintenz*, du nom de son inventeur, se distingue des précédents en ce que, au lieu d'un seul levier, il en présente deux, l'un du premier genre, l'autre du troisième. On va voir que cette combinaison le rend éminemment propre au pesage des colis de toutes dimensions qu'expédie le commerce.

BOC (*fig.* 69) est un levier du premier genre, ayant son point d'appui en O. L'un des bras, OC, supporte un plateau destiné à recevoir des poids marqués, tandis que l'autre, OB, supporte deux tringles verticales BD, AG. Ces

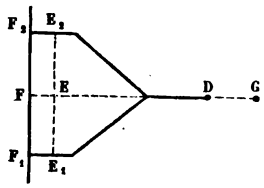
Fig. 69.



tringles sont destinées à transmettre au levier BOC les pressions exercées sur le tablier par les objets que l'on veut peser. Le tablier MNSG se compose d'une table horizontale MN, d'un montant vertical NS et d'une pièce oblique SG, le tout en bois et ne formant qu'un seul corps. La pièce SG, qu'on appelle la *fourche*, parce qu'elle présente du côté de S deux branches entre lesquelles passe la tringle BD, s'accroche en G à la tringle AG. Le tablier s'appuie

en outre sur les deux branches d'un levier inférieur FED, que nous allons décrire. La *fig.* 69 n'en donne que la projection verticale : ce levier n'est pas rectiligne dans toute sa longueur ; il se bifurque du côté de EF, comme l'indique sa projection horizontale (*fig.* 70). Le point *fixe* F de la première figure correspond donc à deux points F_1, F_2,

Fig. 70.

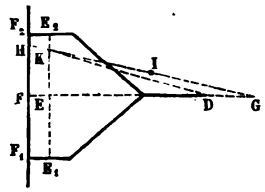


symétriquement placés par rapport à la droite FEDG, et qui sont les véritables points fixes autour desquels tourne le levier inférieur. L'extrémité D est attachée à la tringle BD. Enfin, nous avons dit que le tablier MN avait deux points d'appui sur les branches de ce levier. A cet effet, celles-ci portent deux *couteaux* E_1, E_2 (représentés par leur projection E sur la *fig.* 69), sur lesquels viennent reposer deux *coussinets* fixés sous le tablier. Ainsi, quand la bascule fonctionne, le tablier pèse sur les trois points E_1, E_2 et G. Pour éviter que les couteaux d'appui ne se fatiguent quand la machine est au repos, on soulève, au moyen d'une manette adaptée à la colonne OV, le bras OC, ce qui fait baisser la tringle BD et par suite le levier $F_1 F_2 D$. Alors le tablier descend de lui-même et vient reposer sur les bords de la caisse rectangulaire en bois qui renferme le levier inférieur.

Il faut que le levier supérieur BOC se tienne horizontal quand le tablier et le plateau ne portent aucun poids. On satisfait à cette condition en plaçant une *tare* convenable dans une petite cuvette qui est adaptée au-dessus des chaînes de suspension du plateau.

Cela posé, mettons sur le tablier un corps quelconque, de poids Q ; nous allons montrer comment ce système de leviers permet de l'équilibrer avec un poids placé dans le plateau, *et indépendant de la position que le corps occupe sur le tablier*. Soit I le point où la verticale du centre de gravité de ce corps va percer le plan $E_1 E_2 G$ (*fig*, 71). Le poids Q peut être décomposé en deux forces verticales q, q' appliquées l'une en G, l'autre en K où la droite GI prolongée rencontre la ligne d'appui $E_1 E_2$: cette dernière composante pourrait se partager à son tour en deux autres forces parallèles appliquées aux points E_1, E_2 ; et finalement, le poids Q

Fig. 71.



serait remplacé par trois forces verticales appliquées en G, E_1, E_2, qui exprimeraient les pressions individuelles supportées par les points d'appui du tablier. Mais on va voir qu'il n'est pas besoin de les connaître dans la pratique.

La composante q, appliquée en G, agit évidemment sur le levier supérieur BC, par l'intermédiaire de la tringle, comme si elle était appliquée au point A de ce levier.

Si l'on mène la droite DK qui rencontre en H l'axe fixe $F_1 F_2$, on voit que la composante q' appliquée en K peut d'abord être remplacée par deux autres forces parallèles appliquées l'une au point D, l'autre au point H : cette dernière est détruite par la résistance de l'axe fixe, et la première a pour valeur

$$q' \cdot \frac{HK}{HD} = q' \cdot \frac{FE}{FD}.$$

Mais le point d'application D peut être transporté à l'extré-

mité supérieure B de la tringle verticale; et là, la force $q' \cdot \frac{FE}{FD}$ agit sur le levier BC comme le ferait une force verticale appliquée au point A et dont le moment par rapport au point O serait le même (76), c'est-à-dire comme une force égale à

$$q' \cdot \frac{FE}{FD} \cdot \frac{BO}{AO}.$$

Ainsi, le poids Q placé sur le tablier produit sur le levier BC, par l'intermédiaire du levier inférieur et des deux tringles, le même effet que deux forces verticales

$$q \quad \text{et} \quad q' \cdot \frac{FE}{FD} \cdot \frac{BO}{AO},$$

qui seraient directement appliquées au point A. Ces forces se composent en une seule, égale à leur somme

$$q + q' \cdot \frac{FE}{FD} \cdot \frac{BO}{AO},$$

et comme

$$q + q' = Q,$$

cette somme peut s'écrire

$$q \left(1 - \frac{FE}{FD} \cdot \frac{BO}{AO}\right) + Q \frac{FE}{FD} \cdot \frac{BO}{AO}.$$

Or on veut que cette résultante soit indépendante de la position du corps à peser; donc il faut et il suffit que le coefficient du seul terme qui renferme la pression variable q soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{FE}{FD} = \frac{AO}{BO}.$$

Les dimensions des deux leviers sont en effet proportionnées de manière que cette condition soit satisfaite. Par suite, la résultante appliquée en A se réduit simplement au poids Q.

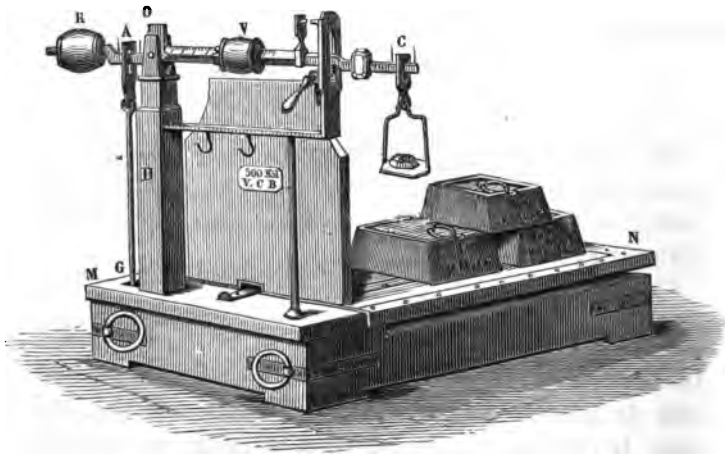
En définitive, l'*effet produit sur la bascule par le corps à peser est le même que si son poids était tout entier suspendu au point* A *du levier supérieur.*

Il en résulte que, pour établir l'équilibre, il suffira de mettre dans le plateau un poids qui soit au poids du corps dans le rapport constant $\frac{OA}{OC}$.

Dans la bascule dite *au dixième,* ce rapport est $\frac{1}{10}$. On n'a donc qu'à décupler la somme des poids marqués mis dans le plateau, pour avoir le poids cherché.

90. *Bascule-romaine* (système Béranger). — Cette bascule, très-répandue depuis quelques années dans les gares de chemins de fer et dans les messageries, a sur la balance de Quintenz plusieurs avantages, dus à un habile constructeur, M. Béranger. D'abord elle évite l'emploi des poids marqués pour toutes les pesées qui n'excèdent pas 100 kilogrammes. A cet effet, le bras OC du fléau supérieur reçoit plus de longueur, et est gradué de 0 à 100 kilogrammes à la manière d'une romaine (*fig.* 72). Le poids

Fig. 72.

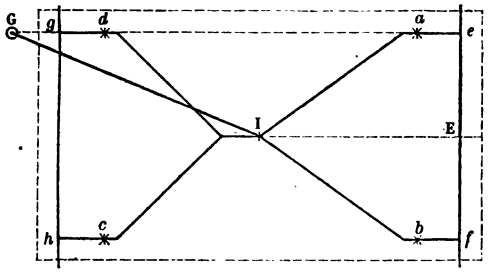


curseur V a la forme d'un boulon que le fléau traverse à frotte-

ment doux, et on l'amène aisément au point convenable pour établir l'équilibre. Ce n'est que pour les corps dont le poids dépasse 100 kilogrammes qu'il faut recourir à des poids marqués, que reçoit le plateau suspendu au point C. Le contre-poids R assure l'horizontalité du fléau, quand le curseur est au zéro de la graduation et que le tablier et le plateau sont à vide : ce contre-poids peut être légèrement rapproché ou éloigné du point O, à la manière d'un écrou. La bascule ne présente plus qu'*une seule tringle* AG, dite *tringle de puissance;* et, par une combinaison de leviers que nous allons expliquer, tout se passe comme si le poids Q du corps à peser était suspendu, *réduit au dixième*, à cette tringle. Le rapport $\frac{OA}{OC}$ étant lui-même égal à $\frac{1}{10}$, les poids marqués qu'il faut mettre dans le plateau représentent seulement $\frac{1}{100}$ du poids Q. Enfin le fléau ROC, au lieu d'être dirigé suivant le prolongement du tablier MN, comme dans la balance de Quintenz, a une direction perpendiculaire, ce qui réduit la longueur de l'appareil et le rend moins embarrassant.

Le tablier MN repose sur quatre couteaux disposés en rectangle *a*, *b*, *c*, *d*, qui appartiennent à deux leviers bifurqués *eIf*, *gIh* (*fig.* 73), dont les axes de rotation sont les droites parallèles *ef*,

Fig. 73.



gh. Ces leviers ne sont pas indépendants : leurs branches se réunissent l'une au-dessous de l'autre par la *bride de centre* I, en sorte qu'ils ne peuvent osciller que d'un mouvement commun. Enfin, la barre IG, fixée au levier *eIf*, rattache ce levier à la tringle de puissance.

Cela posé, le corps, placé sur le tablier, donne naissance à quatre pressions verticales appliquées aux points a, b, c, d, et dont la somme est égale à son poids Q. (Nous n'avons pas à discuter ici cette décomposition, sur laquelle nous reviendrons dans la théorie du plan incliné.) Considérons l'une de ces pressions q appliquée en a. On peut d'abord, sans troubler l'équilibre du levier eIf, la remplacer par une force $q.\frac{ae}{IE}$, appliquée en I (76); et, comme la même transformation convient aux trois autres pressions, on voit déjà qu'on peut les rassembler toutes en ce point central, où elles se composeront en une seule $Q.\frac{ae}{IE}$. Maintenant, l'action de cette résultante sur le levier eIf peut être remplacée par celle d'une force parallèle, appliquée à l'extrémité G de la barre IG, et toujours de même moment par rapport à l'axe ef, c'est-à-dire égale à

$$Q\frac{ae}{IE}.\frac{IE}{Ge}, \quad \text{ou simplement} \quad Q\frac{ae}{Ge}.$$

Donc, si le rapport $\frac{ae}{Ge}$ est égal à $\frac{1}{10}$, le fléau supérieur AOC sera sollicité de haut en bas par une force $\frac{Q}{10}$ appliquée au point A. C'est le résultat que nous avions annoncé.

91. *Balance de Roberval modifiée* (système Béranger).— Dans les magasins où le commerce a besoin de peser rapidement des objets de petites dimensions, on rencontre fréquemment une balance dont les plateaux sont élevés au-dessus du fléau, et dont le mécanisme est une heureuse combinaison de l'ancienne balance de Roberval et de celle de Quintenz.

Les *fig.* 74 et 75 en représentent l'élévation et le plan. Le grand fléau AOB a ses bras égaux, et l'appareil présente deux parties parfaitement symétriques à gauche et à droite du point d'appui. C'est pourquoi il nous suffira de décrire l'une d'elles.

Le plateau horizontal V, dans lequel on place le corps à peser, est supporté par une tige T qui fait corps avec la lame horizontale MN. Les extrémités M et N de cette lame sont soutenues,

l'une par la tringle MA qui est vissée en M sur la lame, et suspendue par un crochet à l'extrémité A du grand fléau, l'autre par la bride NI qui s'attache au levier IH, dit *levier de transmission*. Ce

Fig. 74.

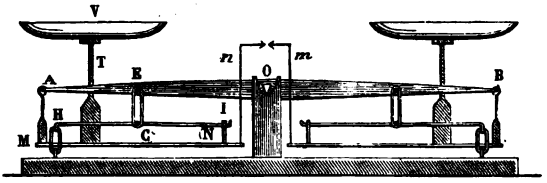
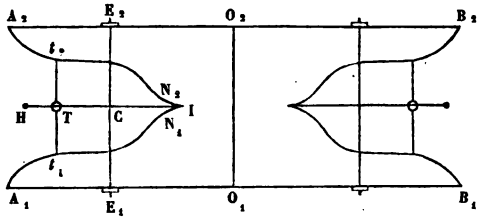


Fig. 75.



levier a son point d'appui en H; il est lui-même rattaché au grand fléau par la bride CE, dont la position est fixée de manière que les rapports $\frac{IH}{CH}$ et $\frac{AO}{EO}$ soient égaux.

La *fig.* 75 représente en projection horizontale le grand fléau, la lame et le levier de transmission. On voit que le fléau se compose de deux branches parallèles A_1O_1, A_2O_2, symétriquement placées par rapport à la ligne HI, suivant laquelle est dirigé le levier de transmission. La lame MN est également géminée, ce qui lui a fait donner le nom de *fourche*, et ses deux branches projetées en A_1N_1, A_2N_2, de forme arbitraire, viennent se réunir au point projeté en I. La traverse E_1E_2 relie les deux branches du fléau à la bride CE et par suite au levier de transmission. De même la traverse t_1t_2 relie les deux branches de la fourche.

Quand le fléau vient à osciller, le parallélogramme $A_1O_1A_2O_2$ se meut de toutes pièces autour de l'axe O_1O_2, l'un de ses côtés ne

faisant que répéter les mouvements de l'autre. Il est aisé de voir que durant ces oscillations la fourche s'abaisse (ou s'élève) de quantités égales à ses deux bouts. En effet, quand l'extrémité A du fléau s'abaisse par exemple d'une quantité h, le point M s'abaisse d'autant; mais la bride EC descend en même temps d'une quantité $h \cdot \frac{EO}{AO}$, et par suite la bride IN s'abaisse de la quantité

$$h \cdot \frac{EO}{AO} \cdot \frac{IH}{CH} = h.$$

Ainsi, la fourche demeure constamment horizontale, et il en est de même du plateau V qu'elle entraîne dans son mouvement.

Maintenant, supposons que l'on place sur le plateau un corps de forme quelconque, dont le poids sera désigné par Q : ce poids donnera naissance à trois pressions verticales q, q', q'', appliquées aux trois points d'appui de la fourche, ou, ce qui revient au même, aux trois points A_1, A_2, I. Les composantes q et q' agissent directement sur le fléau. Quant à la composante q'', qui est dirigée suivant la verticale NI, elle agit sur le levier IH comme le ferait une force parallèle appliquée au point C, et qui aurait même moment par rapport au point H, c'est-à-dire une force égale à $q'' \cdot \frac{IH}{CH}$. Mais cette dernière, que l'on peut considérer comme appliquée à l'extrémité supérieure E de la bride qui lie ce levier à la traverse du grand fléau, se répartit d'abord par moitié sur les points E_1, E_2; puis chacune de ces composantes, dont la valeur est $\frac{q''}{2} \cdot \frac{IH}{CH}$, agit sur le fléau comme le ferait une force appliquée à l'extrémité A_1 ou A_2, et qui aurait même moment par rapport au point O, c'est-à-dire égale à

$$\frac{q''}{2} \cdot \frac{IH}{CH} \cdot \frac{EO}{AO}.$$

Or l'appareil est construit de manière que $\frac{IH}{CH} = \frac{AO}{EO}$. Donc chacune de ces dernières composantes se réduit à $\frac{q''}{2}$.

En définitive, les choses se passent comme si les extrémités A_1, A_2 du grand fléau étaient sollicitées directement par les forces

$$\left(q+\frac{q''}{2}\right), \quad \left(q'+\frac{q''}{2}\right),$$

dont la somme reproduit le poids Q : et comme ces deux groupes agissent par des bras de levier O_1A_1, O_2A_2 qui sont égaux, on voit que la somme de leurs moments sera toujours égale à Q.OA. Ainsi, *quelle que soit la position du corps sur le plateau* V, le fléau de cette balance est dans les mêmes conditions que celui d'une balance ordinaire, à l'extrémité duquel serait suspendu le corps à peser. La même conclusion s'applique aux poids marqués que l'on placera dans l'autre plateau.

Tout le mécanisme des leviers est ordinairement renfermé dans une caisse rectangulaire (*fig.* 76) qui ne laisse voir que les deux plateaux et les extrémités supérieures des deux tiges T qui les supportent.

Fig. 76.

EXERCICES.

I. Une barre homogène ABC, dont l'unité de longueur pèse *a* kilogrammes, et dont une extrémité A est fixe, supporte, en un point B de sa longueur, un poids P, tandis qu'une force verticale Q, appliquée de bas en haut à l'autre extrémité C, est destinée à tenir la barre en équilibre. Étant donnés *a*, P, Q et la dis-

tance AB, on propose de déterminer AC. — Y a-t-il un *minimum* pour l'intensité de la puissance Q, et quelle est la position correspondante du point C?

II. Résoudre le problème analogue au précédent, dans lequel on suppose le point d'appui A placé entre B et C, et les deux forces P et Q verticales et de même sens.

ONZIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Poulie. — Équilibre de la poulie fixe. — Équilibre de la poulie mobile. — Moufles.

92. *De la poulie fixe.* — La poulie dite *fixe* se compose d'une roue circulaire AOB, qui a la liberté de tourner dans son plan autour du centre fixe O, et dont la circonférence est embrassée en partie par une corde ou chaîne flexible, tirée à ses extrémités par deux forces tangentielles P et Q (*fig.* 77 et 78). Pour assurer la mobilité de la roue autour du point fixe, on peut s'y prendre de deux manières :

Fig. 77.

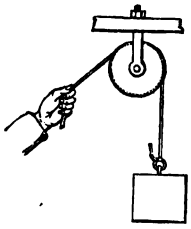
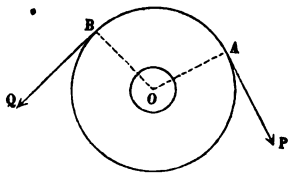


Fig. 78.



Ou bien adapter à la région centrale de la roue un axe perpendiculaire à son plan, qui la traverse en faisant corps avec elle, et repose par ses extrémités cylindriques sur deux *coussinets* fixes de même forme qui lui permettent de tourner sur lui-même ;

Ou bien fixer l'axe à une *chape*, et pratiquer dans la roue un *œil* cylindrique que l'axe traverse à la manière d'un essieu ordinaire.

La corde est maintenue à la circonférence de la roue au moyen d'une rainure ou *gorge* dans laquelle elle s'engage.

On voit qu'ici l'obstacle fixe n'est pas réellement un *point*, mais bien un *axe* de très-courtes dimensions. A ce titre, on pourrait n'étudier la poulie que comme un cas particulier du *treuil*. Cependant, comme l'équilibre de cette machine se ramène très-simplement à celui du levier, il est préférable de la considérer directement. D'ailleurs elle présente, relativement à la mobilité de la corde qui l'embrasse, une circonstance particulière qui n'a pas lieu dans le treuil.

93. *Condition d'équilibre de la poulie fixe.* — Remarquons d'abord que si l'équilibre existe, on ne le trouble pas en fixant le corps de la roue de manière qu'elle ne puisse plus tourner sur son axe. Mais alors on n'a plus qu'une corde mobile tendue sur la circonférence d'un cercle fixe. Or, pour qu'elle ne glisse pas, il est évident que les tractions P et Q, qui agissent tangentiellement à ses deux extrémités, doivent être égales (*). Ainsi, pour assurer l'équilibre de la corde sur la roue supposée fixe, il faut qu'on ait $P = Q$.

Actuellement, rendons à la roue sa mobilité. En vertu de l'égalité $P = Q$, la corde ne peut se séparer de la roue et fait corps avec elle. On peut donc considérer les forces P et Q comme appliquées, *non plus à la corde*, *mais aux points* A *et* B *de la roue*. Seulement, comme la corde n'est pas infiniment mince, et que les forces agissent suivant son axe, il convient de relever les points d'application A et B au-dessus de la surface de la gorge d'une quantité égale à la moitié du diamètre de la corde. La distance de chacun de ces points au centre C est ce que nous conviendrons d'appeler le *rayon de la poulie*. La machine présente main-

(*) Nous faisons ici abstraction de la résistance qu'oppose au glissement de la corde le *frottement* de celle-ci contre la gorge de la poulie. A raison de ce frottement, l'équilibre peut subsister tant que la différence des deux forces P et Q ne dépasse pas une certaine limite, qui dépend de l'état des surfaces en contact.

tenant toutes les conditions d'un levier coudé, dont les bras sont les rayons OA, OB, et dont le point d'appui est O. Pour l'équilibre, on aura

$$P.OA = Q.OB.$$

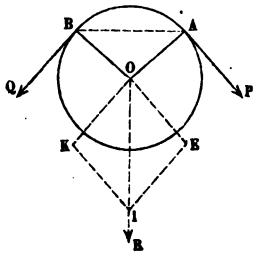
Or déjà $P = Q$; et, dans le cercle, $OA = OB$. Cette équation est donc satisfaite d'elle-même.

Donc, la condition d'équilibre nécessaire et suffisante est *que la puissance soit égale à la résistance.*

94. *Cas d'une poulie à gorge elliptique.* — Le raisonnement qui précède fait pressentir que cette condition unique ne suffirait plus, si la roue n'était pas circulaire. Par exemple, dans le cas d'une poulie à gorge elliptique, on devrait encore avoir $P = Q$; car l'égalité des tensions extrêmes de la corde est indépendante de la forme du contour curviligne sur lequel elle est appliquée. Mais l'égalité des deux perpendiculaires OA, OB n'aurait lieu qu'autant que la bissectrice de l'angle des tangentes AP, BQ passerait par le centre O. Or ceci exige que les points A et B, où la corde se détache de la poulie, soient à égale distance de l'un des sommets de l'ellipse.

95. *Pression supportée par le centre de la poulie.* — La pression supportée par le centre de la poulie est, comme dans le levier, la résultante des deux forces égales P et Q. Elle est donc représentée (*fig.* 79) par la diagonale OI du

Fig. 79.



losange OEIK, dont les côtés sont parallèles et propor-

tionnels aux forces Si on la désigne par R, on a

$$\frac{P}{R} = \frac{OE}{OI}.$$

Mais les triangles OIE, AOB sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Donc

$$\frac{OE}{OI} = \frac{OA}{AB},$$

et, par suite,

$$\frac{P}{R} = \frac{OA}{AB}.$$

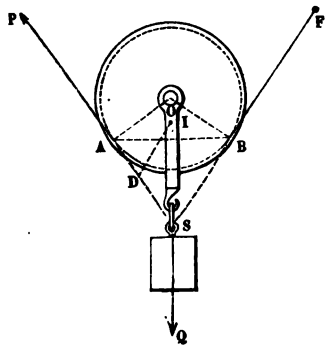
Ainsi, *la puissance est à la pression que supporte le centre de la poulie, comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

La pression atteint son maximum quand les cordons AP, BQ sont parallèles, et ce maximum est double de la puissance.

On voit que la poulie fixe n'a d'autre effet que de transmettre l'action de la force motrice à un point situé hors de sa direction : elle ne change rien à son intensité.

96. *De la poulie mobile.* — Dans la poulie dite *mobile* (*fig.* 80), un poids Q est suspendu à la chape, par un

Fig. 80.



crochet ou cordon dont la direction coïncide avec la verti-

cale du centre O; et la corde qui embrasse la partie inférieure AB de la gorge est, d'une part, attachée à un point fixe F, de l'autre, tirée par la puissance P suivant la tangente AP.

Dans l'état d'équilibre, le point fixe tient lieu d'une force égale et contraire à la tension du cordon FB. Si donc on conçoit que cette force, de grandeur encore inconnue, soit appliquée suivant BF, on pourra supprimer le point fixe, et regarder le système comme entièrement libre. Cela posé, on voit d'abord que la corde PABF doit être, comme dans la poulie fixe, également tendue à ses deux extrémités; car l'équilibre ne serait pas troublé si l'on venait à fixer l'axe. Ainsi la tension du cordon BF est égale à P. Dès lors, l'état du système est le même que si l'on avait *trois forces* P, P, Q *dirigées respectivement suivant* AP, BF, OQ, *en équilibre sur un corps solide libre.*

L'une d'elles, la force Q, devra donc être égale et opposée à la résultante des deux autres. Or celle-ci est dirigée suivant la bissectrice de l'angle des tangentes AP, BF; donc la verticale OQ coïncidera avec cette bissectrice ou, ce qui revient au même, la sous-tendante AB de l'arc embrassé par la corde sera horizontale.

De plus, si l'on prend, à partir du point de concours S des deux tangentes et sur la direction de l'une d'elles, une longueur SD pour représenter la force P, et que l'on mène DI parallèle à l'autre tangente jusqu'à la rencontre de la verticale OQ, on aura (15)

$$\frac{P}{Q} = \frac{ID}{IS} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{OB}{AB}.$$

Les conditions d'équilibre de la poulie mobile sont donc :

1° *Que la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde soit horizontale;*

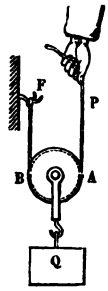
2° *Que la puissance soit au poids suspendu à la chape, comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

Dans le cas où l'arc est de 60 degrés, on a

$$AB = AO \quad \text{et} \quad P = Q.$$

Le cas où la puissance agit avec le plus d'avantage est celui où les cordons AP, BF sont parallèles; elle n'est plus alors que moitié du poids qu'elle tend à faire monter (*fig.* 81).

Fig. 81.



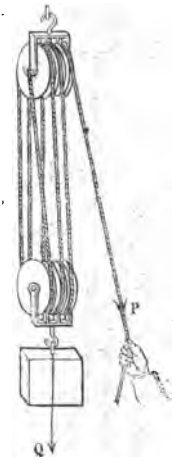
On rencontre très-souvent la poulie mobile combinée avec la poulie fixe dans les ateliers de construction où l'on a des matériaux d'un poids considérable à élever à de grandes hauteurs. Nous en donnerons un exemple plus loin.

97. *Moufles.* — Une moufle est l'assemblage de plusieurs poulies, réunies dans une même chape, et ordinairement sur le même axe, mais libres de tourner indépendamment les unes des autres. On appelle *palan* le système de deux moufles, qui renferment le plus souvent un même nombre de poulies égales (*fig.* 82). La chape de la moufle supérieure est accrochée à un corps ou massif fixe.

La moufle inférieure est mobile, et sa chape porte un crochet auquel on suspend le fardeau à élever. Une corde, tirée à l'une de ses extrémités par la puissance P, embrasse successivement toutes les poulies en passant de la moufle

fixe à la moufle mobile, et *vice versâ*, et vient finalement s'attacher à la chape de la moufle fixe.

Fig. 82.



L'équilibre général du système exige évidemment que chaque poulie soit séparément en équilibre ; et comme c'est la même corde qui les embrasse toutes, il est clair qu'elle est partout également tendue. D'ailleurs, on peut regarder les cordons comme sensiblement parallèles.

Le poids Q est donc dans les mêmes conditions que s'il était soutenu par un système de forces parallèles, toutes égales à la puissance P, et en même nombre que les cordons qui vont directement d'une moufle à l'autre, c'est-à-dire en même nombre que les poulies employées. Soit n ce nombre. On aura

$$Q = nP,$$

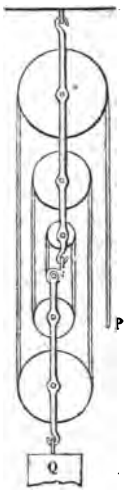
d'où

$$P = \frac{Q}{n}.$$

Dans le cas de la *fig.* 82, $n = 6$. La puissance n'est donc que le sixième de la résistance à laquelle elle fait équilibre.

On rencontre encore, particulièrement dans le service de la navigation, une autre disposition de palans que représente la *fig.* 83. Les poulies sont inégales et assemblées

Fig. 83.



sur des axes parallèles, de sorte que les cordons qui vont d'une moufle à l'autre sont encore sensiblement parallèles; une même chape porte les axes de chaque moufle. Du reste, la théorie précédente subsiste sans modification, et l'on a toujours

$$P = \frac{Q}{n},$$

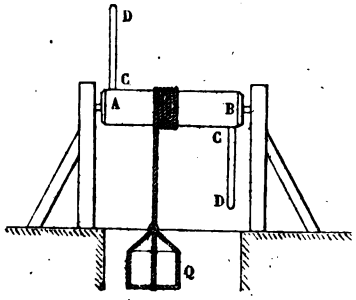
n étant le nombre des poulies employées.

DOUZIÈME ET TREIZIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Treuil. — Condition générale d'équilibre du treuil. — Relation entre la puissance et la résistance.

98. *Du treuil.* — Le *treuil* ou *tour* est un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe. Dans ce mouvement, chaque point décrit un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe, et dont le centre est sur l'axe. Le corps a ordinairement la forme d'un cylindre en bois ou en fonte, dit *arbre* du treuil, terminé à ses extrémités par deux autres cylindres, de même axe, mais d'un diamètre plus petit, nommés *tourillons*, qui reposent sur deux coussinets fixes de même forme (*fig.* 84). Quand la machine

Fig. 84.



est en mouvement, l'arbre tournant AB est dans les mêmes conditions que si son axe géométrique était fixe. La résistance à vaincre est ordinairement un fardeau Q, suspendu à une corde qui fait plusieurs tours sur l'arbre et est attachée par un bout à sa surface. La puissance P est appliquée, dans un plan perpendiculaire à l'axe, soit au moyen d'une ou plusieurs barres CD, implantées sur le cylindre, et dont

l'ouvrier saisit l'extrémité avec la main ; soit au moyen d'une *roue* faisant corps avec l'arbre et garnie de poignées ou de chevilles ; soit à l'aide d'une *manivelle*, tige longue de $0^m,40$ environ, montée perpendiculairement sur l'axe de rotation et armée d'une poignée (*fig.* 85 et 86).

Fig. 85.

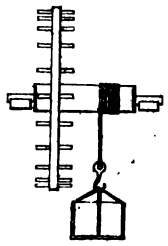
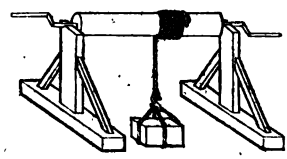


Fig. 86.



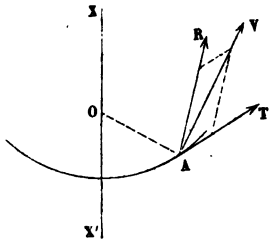
La roue à chevilles est très-répandue dans les environs de Paris, où elle sert à tirer les pierres des carrières ; l'ouvrier monte sur les chevilles et le poids de son corps fait tourner la roue.

Quand le treuil est destiné à exercer de grandes tractions horizontales, comme l'exige par exemple le service des ports de mer, l'arbre est vertical et les barres sur lesquelles s'exerce l'effort des ouvriers sont horizontales. Le câble de traction n'est plus fixé par un bout sur la surface du cylindre : en même temps qu'il s'enroule du côté où a lieu la traction, il se déroule du côté de son extrémité libre qu'un ouvrier tient constamment tendue. La machine prend alors le nom de *cabestan*.

Quelle que soit la forme du treuil, quand cette machine est bien construite, le centre de gravité du solide tournant doit tomber sur l'un des points de l'axe fixe ; par conséquent, le poids de la machine n'intervient en rien dans la condition d'équilibre. Il n'influe que sur les pressions supportées par l'axe, comme on le verra plus loin.

99. *Condition générale de l'équilibre.* — On peut toujours réduire les forces, motrices ou résistantes, appliquées au treuil, à deux U, V, dont l'une U soit appliquée à un point de l'axe (66). Celle-ci est détruite par la résistance de l'axe, et l'équilibre exige que l'autre soit aussi détruite. C'est ce qui aura lieu si cette force est *dans un même plan avec l'axe,* c'est-à-dire si elle le rencontre ou lui est parallèle. En effet, dans le premier cas, on peut la regarder comme appliquée au point de rencontre où elle est annulée par la résistance de l'axe; dans le second cas, elle tend à entraîner le treuil suivant la direction de l'axe, et ce mouvement longitudinal est par hypothèse impossible. L'équilibre a donc lieu. Au contraire, si la force V n'était pas dans un même plan avec l'axe, on pourrait la décomposer en deux autres (*fig.* 87), l'une T dirigée suivant la perpendiculaire au plan XOA qui passe par l'axe XX′ et par le

Fig. 87.



point d'application A de V, l'autre R dirigée suivant la projection de V sur ce plan. Cette dernière force, étant dans un même plan avec l'axe, serait détruite, comme on vient de le voir; mais la composante T aurait tout son effet pour entraîner le point A suivant la tangente au cercle qu'il est libre de décrire.

Ainsi la condition générale de l'équilibre du treuil peut s'exprimer ainsi :

Toutes les forces étant réduites à deux, dont l'une est appliquée à un point de l'axe, il faut et il suffit que l'autre soit dans un même plan avec l'axe.

100. *Expression de la condition d'équilibre par une équation.* — On peut aller plus loin, et traduire cette condition d'équilibre par une équation entre les forces proposées et leurs distances à l'axe.

D'après ce qui précède, le moment de chacune des forces U et V par rapport à l'axe est nul, dans l'état d'équilibre. Or la somme des moments de ces deux forces est toujours égale (71) à la somme des moments des forces primitives. Donc cette dernière est nulle.

Réciproquement, si la somme des moments de toutes les forces appliquées au treuil, par rapport à l'axe, est nulle, il en sera de même de la somme des moments des deux forces U et V, qui est égale à la première. Or le moment de U est nul de lui-même, si l'on suppose que cette force passe par un point de l'axe; donc celui de V est nul aussi, c'est-à-dire que cette force et l'axe sont dans un même plan. Il y a donc équilibre.

En définitive, pour l'équilibre du treuil, il faut et il suffit que *la somme des moments des forces par rapport à l'axe fixe soit égale à zéro.*

En désignant par P l'une quelconque des forces proposées, par p sa plus courte distance à l'axe, par α son inclinaison sur cette droite, et adoptant la caractéristique $\sum$ pour indiquer une somme de termes semblables, l'équation d'équilibre du treuil prend la forme

$$\sum \mathrm{P}p \sin\alpha = 0.$$

Quand toutes les forces sont dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe du treuil, ce qui a lieu communément, $\alpha = 90$ degrés et $\sin\alpha = 1$. L'équation d'équilibre se réduit à

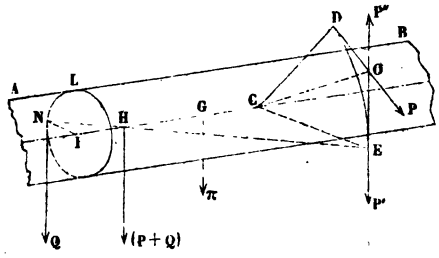
$$\sum \mathrm{P}p = 0.$$

101. *Relation entre la puissance et la résistance.* — Reprenons le cas où le treuil n'est sollicité que par deux forces : une puissance P agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe (*fig.* 88), à une distance $CD = p$ de cette droite; et une résistance Q, dirigée suivant une tangente à la section droite du cylindre, de rayon $IN = q$. Cherchons, sans recourir au théorème des moments, la condition d'équilibre.

Par l'axe et par le rayon IN qui aboutit au point d'application de la résistance Q, menons un plan.

Soit E le point où ce plan est coupé par l'arc de cercle, de rayon CD, que tend à décrire la puissance P. Je dis d'abord que cette puissance peut, sans que l'équilibre soit troublé, être transportée à l'extrémité E du levier CE que

Fig. 88.



l'on supposera fixé au cylindre, pourvu qu'elle agisse toujours tangentiellement à l'arc DE. La raison de symétrie suffirait pour justifier cette assertion; mais, pour mettre la chose en évidence, appliquons au point E deux forces P′, P″ égales à P et dirigées en sens contraires suivant la tangente à l'arc. Il n'y aura rien de changé au système. Mais les deux forces égales P et P″, qui concourent en O, ont une résultante dirigée suivant la bissectrice CO, laquelle est détruite par la résistance de l'axe. Il reste donc la force P′, qui n'est autre que la force P transportée en E.

Maintenant, les deux forces *parallèles* P′ et Q se composeront en une seule, dont le point d'application devra, pour l'équilibre, tomber au point H où la droite d'application NE rencontre l'axe fixe; et l'on aura, vu que $P' = P$,

$$\frac{P}{Q} = \frac{NH}{HE} = \frac{IN}{CE} = \frac{q}{p}.$$

Ainsi, *la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la circonférence que tend à décrire la puissance.*

Il faut ajouter que *les deux forces doivent tendre à faire tourner en sens contraires.*

Si l'on avait voulu employer le théorème des moments, on aurait eu immédiatement

$$Pp - Qq = 0,$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p},$$

comme ci-dessus.

Remarque. — Quand, au lieu d'une seule barre CD fixée à l'arbre du treuil, il y en a plusieurs d'égale longueur, comme dans la *fig.* 84, et que plusieurs ouvriers les poussent dans le même sens, en exerçant sur elles des efforts égaux, l'équation

$$\sum Pp = 0$$

donne

$$nPp = Qq,$$

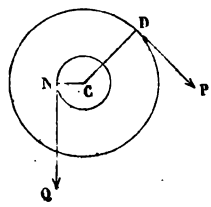
n désignant le nombre des ouvriers; d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{n}\cdot\frac{q}{p}.$$

L'effort individuel nécessaire pour assurer l'équilibre est donc réduit en proportion du nombre des ouvriers, ce que l'on pouvait prévoir.

102. *La poulie considérée comme cas particulier du treuil.* — On voit que l'équilibre du treuil ne dépend nullement de la distance IC (*fig.* 88) qui sépare la puissance de la résistance. Ces deux forces pourraient agir dans le même plan perpendiculaire à l'axe sans que les conditions fussent changées. Puis, si l'on suppose que le rayon CN (*fig.* 89) croisse jusqu'à devenir égal à CD,

Fig. 89.



le cylindre et la roue du treuil se confondront, et l'on retombera sur la poulie fixe, dans laquelle l'équilibre exige que la puissance et la résistance soient égales.

103. *Pressions sur les appuis.* — Dans l'état d'équilibre, les points d'appui des tourillons sur les coussinets supportent des pressions qu'il importe de déterminer.

Deux points suffisent pour assurer la fixité de l'axe supposé inflexible. C'est pourquoi, bien que chaque tourillon s'appuie effectivement sur son coussinet, non par un *point* unique, mais par tous les points d'une petite *arête* de contact le long de laquelle ont lieu des pressions, la théorie donne seulement les *pressions résultantes,* que l'on peut regarder comme supportées par deux points fixes pris à volonté sur ces arêtes, par exemple au milieu de chacune d'elles. Soient donc F, F′ les deux points fixes, qui sont censés supporter toute la charge provenant du poids de la machine et des forces qui lui sont appliquées; R_1, R_2 les résistances, de grandeur et de direction inconnue, que ces points opposent, résistances égales et contraires aux pressions cherchées. Si l'on introduit ces deux nouvelles forces dans le système, on pourra supprimer les points fixes et considérer le treuil comme un corps parfaitement libre. Les six équations de l'équilibre (71)

devront donc subsister entre les forces primitives et les deux forces R_1, R_2.

Choisissons le point F pour origine des trois axes rectangulaires, et la droite FF′ pour l'axe Fx. Soient X_1, Y_1, Z_1 les trois composantes de la force R_1 suivant ces axes; X_2, Y_2, Z_2 les composantes de R_2. Les trois premières équations d'équilibre seront

$$(1)\qquad \begin{cases} X_1 + X_2 + \sum X = 0, \\ Y_1 + Y_2 + \sum Y = 0, \\ Z_1 + Z_2 + \sum Z = 0. \end{cases}$$

La force R_1, passant par l'origine, ne donnera aucun moment par rapport aux axes. La force R_2, qui rencontre l'axe Fx, ne donnera pas de moment par rapport à cet axe; mais ses moments par rapport aux axes Fy, Fz seront $-Z_2 h$ et $+Y_2 h$, en désignant par h la longueur FF′. On aura donc pour les trois équations des moments :

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum M_x = 0, \\ \sum M_y - Z_2 h = 0, \\ \sum M_z + Y_2 h = 0. \end{cases}$$

La première, qui ne renferme pas les pressions inconnues, établit entre les forces proposées une relation nécessaire pour l'équilibre. En effet, elle n'est autre chose que l'équation déjà établie (100).

Des deux autres équations (2) on tire Y_2 et Z_2. Puis, les deux dernières équations (1), dans lesquelles on substitue les valeurs de Y_2 et Z_2, fournissent Y_1 et Z_1.

Enfin la première des équations (1) donne la somme $(X_1 + X_2)$; mais les valeurs individuelles de ces résistances longitudinales restent indéterminées.

L'indétermination tient à ce que, l'axe FF′ étant supposé inflexible, rien n'empêche de transporter de F à F′, ou *vice versâ*,

une partie de la résistance totale estimée suivant cet axe. C'est donc la somme $X_1 + X_2$ qui seule peut être déterminée; et sa valeur est égale et de signe contraire à la somme des forces proposées, estimées dans le sens de la longueur de l'axe fixe.

Au contraire, les pressions normales à l'axe,

$$\sqrt{Y_1^2 + Z_1^2}, \quad \sqrt{Y_2^2 + Z_2^2},$$

sont parfaitement déterminées de grandeur et de direction.

Lorsque les forces appliquées au treuil agissent toutes dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe, on a

$$\sum X = 0;$$

et, par suite,

$$X_1 + X_2 = 0.$$

Dans ce cas l'axe n'éprouve plus de pression qui tende à l'entraîner dans le sens de sa longueur, ce qui était évident *à priori*.

104. *Pressions dans le cas où le treuil n'est sollicité que par deux forces.* — Reprenons, en particulier, le cas où le treuil n'est sollicité que par deux forces, une puissance et une résistance agissant dans des plans perpendiculaires à l'axe (auquelles il faut joindre le poids de la machine); et déterminons, sans le secours des six équations générales, les pressions supportées par les points d'appui.

D'après ce qui a été dit (101), ces pressions proviennent : 1° de la résultante $(P' + Q)$ des forces P' et Q, appliquée au point H de l'axe (se reporter à la *fig.* 88); 2° de la résultante des forces égales P et P'', dirigée suivant la bissectrice CO, et qu'on peut regarder comme appliquée au point C de l'axe; 3° du poids π du treuil, que l'on considérera comme une force verticale appliquée au centre de gravité G.

Or, il résulte des triangles semblables INH, CEH, que le point H divise la longueur IC en deux segments proportionnels à NH et HE, c'est-à-dire réciproquement proportionnels aux forces Q et P'. Donc ce point H est celui qu'on obtiendrait pour point d'application de la résultante des

forces Q et P′, si ces forces, au lieu d'être appliquées en N et E, étaient transportées parallèlement à elles-mêmes sur l'axe en I et C. D'ailleurs, la résultante partielle appliquée en Ç suivant CO peut être redécomposée dans ses deux composantes P et P″. Mais alors on a en C trois forces P′, P″ et P, qui se réduisent à la seule force P, puisque P′ et P″ sont égales et contraires.

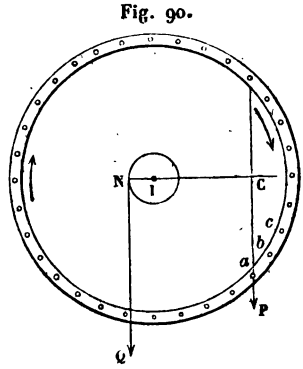
En définitive, *l'axe supporte les mêmes pressions que si la puissance et la résistance s'étaient simplement transportées, parallèlement à elles-mêmes, sur cette droite, sans sortir de leurs plans perpendiculaires à l'axe.*

Cela établi, il ne restera plus qu'à décomposer les forces P, Q, π, considérées comme appliquées aux points C, I, G, chacune en deux forces parallèles appliquées aux points fixes F et F′; puis à prendre la résultante des trois forces qui solliciteront le point F, et celle des trois forces qui solliciteront F′. On aura ainsi les pressions individuelles de ces points d'appui.

Terminons cette Leçon en passant en revue les principales applications du treuil.

105. *Roue à chevilles.* — Nous avons déjà cité la roue à chevilles comme très-employée par les carriers.

Fig. 90.



Quand l'ouvrier monte sur les chevilles (*fig.* 90), le

poids P de son corps est une force verticale constante, mais dont le bras de levier IC varie avec la position de l'ouvrier. Supposons cette position telle que l'équilibre existe, c'est-à-dire

$$IC = \frac{Q}{P} \cdot IN.$$

Si l'ouvrier monte sur les échelons dans le sens *abc*..., son bras de levier augmente, et l'équilibre est rompu. La roue entre donc en mouvement dans le sens indiqué par les flèches, c'est-à-dire en sens contraire du mouvement ascensionnel de l'ouvrier. Celui-ci est donc ramené vers le point *a*; et, s'il cesse de monter, la vitesse acquise par la roue le fait rétrograder au-dessous de ce point. Mais alors, son bras de levier étant devenu moindre que IC, la résistance Q devient prépondérante, et imprime à la roue un mouvement contraire qui ramène l'ouvrier vers la position d'équilibre. Il y a donc *stabilité*, condition essentielle de sécurité pour l'ouvrier. Mais on voit que cette condition n'est remplie qu'autant que la région *abc*..., sur laquelle il se meut, reste toujours au-dessous de l'axe.

106. *Manége.* — La force de l'homme n'est pas la seule qu'on emploie dans le treuil. On se sert aussi, comme moteur, du cheval, que l'on fait tirer en tournant dans un *manége*. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'extraire de la terre d'un puits. Imaginons un arbre cylindrique ou prismatique, vertical, mobile sur son axe, et portant dans sa région supérieure un tambour cylindrique, auquel sont attachées deux cordes, qui font plusieurs tours horizontaux sur sa surface. Ces cordes passent sur deux poulies fixes, dites *poulies de renvoi;* puis elles descendent verticalement et sont attachées par leurs extrémités inférieures à deux caisses ou paniers dont l'un doit monter plein, tandis que l'autre descend à vide. Enfin une pièce de bois horizontale, dont la longueur la plus convenable est de

12 à 14 mètres, est fixée par son milieu à l'arbre, à une hauteur qui permet d'attacher un cheval à chaque extrémité. Le mouvement de rotation de l'arbre fait enrouler la corde à laquelle est suspendu le panier plein, tandis que l'autre corde se déroule. (Le lecteur suppléera aisément à la figure.)

Soient P l'effort que doit exercer chaque cheval pour que la machine reste en équilibre, R le bras de levier à l'extrémité duquel il agit, Q et q les poids des paniers plein et vide, r le rayon du tambour. L'équation d'équilibre sera évidemment

$$2PR = (Q - q)\,r.$$

Si l'on suppose

$$r = \frac{1}{6}R \quad \text{et} \quad P = 45 \text{ kilogrammes},$$

on aura

$$Q - q = 540 \text{ kilogrammes}.$$

Ainsi, il suffira que chaque cheval exerce une traction moyenne de 45 kilogrammes pour *tenir en équilibre* un poids de $(540 + q)$ kilogrammes.

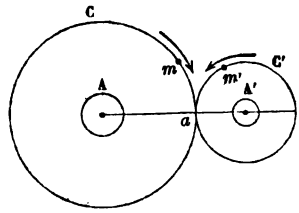
Tel serait aussi, comme on le verra plus loin, l'effort suffisant pour *entretenir le mouvement uniforme* de rotation de la machine, si l'on pouvait négliger les résistances dites *passives*, c'est-à-dire le frottement des tourillons contre la surface intérieure des coussinets et la roideur des cordes.

107. *Roues dentées.* — On a souvent besoin dans l'industrie de transmettre le mouvement de rotation d'un arbre à un autre situé à petite distance du premier. Nous n'avons pas ici pour objet d'exposer les divers modes de transmission de mouvement. Nous nous bornerons à montrer comment les *roues dentées* permettent non-seulement d'opérer cette transmission, mais en même temps d'ac-

croître singulièrement l'effet statique de la force motrice.

Supposons deux arbres parallèles A, A′ (*fig.* 91), sur lesquels sont montées perpendiculairement deux roues C,

Fig. 91.



C′, dont les circonférences se touchent en *a*, et sont assez fortement pressées l'une contre l'autre. Si la roue C vient à tourner sur son axe, elle forcera par adhérence la roue C′ à tourner en sens contraire; et deux arcs égaux *am*, *am′*, pris sur les deux circonférences à partir du point de contact, viendront évidemment s'appliquer exactement l'un sur l'autre dans tous leurs points. Si la roue C′ a un rayon deux, trois, quatre fois plus petit que la roue C, elle fera deux, trois, quatre tours pendant que l'autre n'en fera qu'un. En général, les nombres de tours faits simultanément par les deux roues seront en raison inverse de leurs rayons. Si le mouvement de la roue conductrice C est *uniforme*, il gardera son uniformité en se transmettant à la roue C′. Seulement la *vitesse angulaire* sera modifiée. (Nous reviendrons, dans la troisième Partie de l'ouvrage, sur le mouvement de rotation autour d'un axe. Quant à présent, ce que nous venons de dire suffit.)

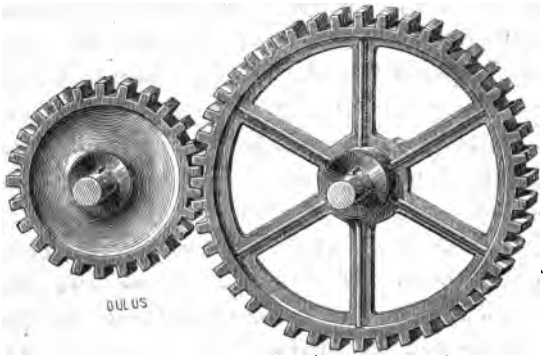
Mais on comprend que cette transmission de mouvement *par contact* n'est assurée qu'autant que la roue C′ n'oppose pas une trop grande résistance au mouvement. Autrement, l'adhérence ne suffit plus, et l'on est exposé à voir la roue conductrice tourner seule en *glissant* sur C′.

Pour rendre, en quelque sorte, obligée la communica-

tion du mouvement, on pratique à la circonférence de chaque roue des saillies ou *dents* et des *creux* alternatifs, également espacés ; et l'on fait en sorte que les dents de l'une s'engagent successivement dans les creux de l'autre (*fig.* 92). De cette manière, la roue C ne peut tourner sans entraîner la roue C′, à moins toutefois que les dents ne se déforment ou ne se brisent. On donne à ce système le nom de *roues dentées* ou *d'engrenage*.

L'espace occupé par une dent et par le creux adjacent s'appelle le *pas de l'engrenage :* cet espace est le même sur le contour de chaque roue, en sorte que les nombres des dents sont proportionnels aux circonférences (ou aux rayons) des deux roues. La condition essentielle à laquelle le tracé d'un engrenage doit satisfaire, c'est que la transmission du mouvement d'une roue dentée à l'autre se fasse exactement comme dans le cas des deux roues en contact

Fig. 92.



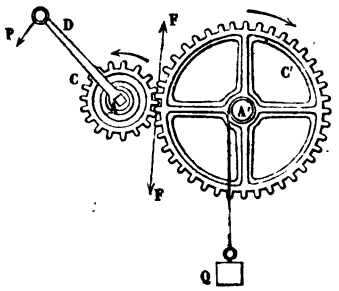
de la *fig.* 91. Mais ce n'est pas le lieu d'exposer la théorie des engrenages, et nous devons nous borner à ces simples notions.

Dans la *fig.* 92 la grande roue est évidée ; l'autre, qui est beaucoup plus petite, est pleine et prend le nom de *pignon*. La rayon du pignon est rarement plus petit que le cinquième de celui de la roue.

Ce pignon est mis en mouvement par une manivelle D (*fig.* 93). Désignons par p l'effort que l'ouvrier doit exercer pour faire équilibre au poids Q suspendu au cylindre A′; par r et r' les rayons du pignon C et du cylindre A′; par R et R′ les rayons de la manivelle et de la roue C′.

Dans l'état d'équilibre, la dent du pignon C exerce, sur le point de la dent de la roue C′ où a lieu le contact, une certaine pression F, qui joue le rôle de puissance par rapport au treuil A′C′ : elle est dirigée suivant la tangente commune aux deux circonférences de rayon r et R′. Mais la roue C′ réagit sur le pignon C avec une force égale et contraire, qui joue le rôle de résistance par rapport au

Fig. 93.



treuil AC. Or il est évident que chaque roue doit être séparément en équilibre, tant en vertu de la force qui lui est immédiatement appliquée qu'en vertu de la pression ou réaction qu'elle éprouve de la part de l'autre. On a donc (101)

$$PR = Fr \quad \text{et} \quad Qr' = FR';$$

et divisant membre à membre pour éliminer l'auxiliaire F, il vient

$$\frac{P}{Q} = \frac{rr'}{RR'}.$$

Ainsi *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons du pignon et du cylindre est au produit des rayons de la manivelle et de la roue.*

Dans la pratique, on remplace le rapport des rayons du pignon et de la roue dentée par celui des nombres de dents que portent ces deux roues.

Supposons, par exemple, que la roue dentée ait dix fois plus de dents que le pignon, et que le rayon de la manivelle soit cinq fois plus grand que celui du cylindre; on aura

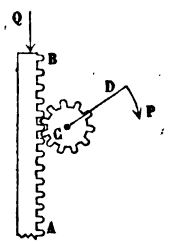
$$P = \frac{1}{50} Q.$$

Ainsi un poids de 500 kilogrammes n'exigera, pour être tenu en équilibre, qu'un effort de 10 kilogrammes appliqué à la manivelle.

Il est clair que la relation précédente n'est pas limitée au cas de *deux* treuils réagissant l'un sur l'autre. Par exemple, au lieu d'appliquer immédiatement la résistance Q au cylindre A′, si l'on imagine que ce cylindre soit remplacé par un pignon denté dont les dents engrènent avec celles de la roue d'un troisième treuil, et que le poids Q soit suspendu au cylindre de ce dernier, on trouvera que *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons et du cylindre est au produit des rayons de la manivelle et des deux roues*. Etc.

108. *Cric*. — Le lecteur peut encore s'exercer à appliquer la théorie des roues dentées à l'équilibre du *cric* représenté par la *fig*. 94. Le cric, réduit à ses éléments essen-

Fig. 94.



tiels, se compose d'une barre rectiligne dentée d'un côté AB,

dite *crémaillère,* qui engrène avec un pignon C, muni d'une manivelle D. On emploie cette machine à soulever d'une petite quantité des corps dont le poids est très-considérable, tels qu'une voiture chargée. A cet effet on engage au-dessous du corps à soulever, soit la tête de la crémaillère, soit une pièce latérale inférieure qui fait corps avec elle. Puis on fait tourner la manivelle, qui force la crémaillère à monter.

Pour accroître l'effet du cric, on fait souvent agir le pignon C, non directement sur la crémaillère, mais sur une roue dentée qui engrène avec lui; et sur l'axe de cette roue on monte un second pignon qui engrène avec la crémaillère. Il est aisé de voir que, dans l'état d'équilibre, *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit du rayon de la roue par celui de la manivelle.*

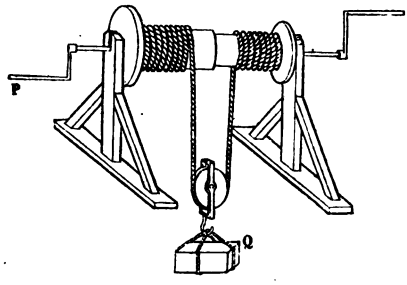
Un appareil particulier, nommé *encliquetage,* est destiné à faire que l'ouvrier puisse à volonté suspendre l'effort qu'il exerce sur la manivelle du cric, sans craindre que le corps soulevé ne retombe.

L'encliquetage consiste en un *doigt* ou petit levier curviligne très-mobile, dont le point fixe est sur le corps du cric, et qui peut s'engager entre les dents d'une roue extérieure faisant corps avec la manivelle. Quand le doigt est dans cette position, il présente sa concavité aux dents, et ne s'oppose pas à ce que la roue tourne dans le sens ordinaire, de gauche à droite. En effet chaque dent vient passer à frottement doux sous le doigt qu'elle soulève, puis celui-ci retombe en vertu de son poids dans le creux qui sépare cette dent de la suivante. Mais le doigt s'oppose à ce que la roue tourne en sens contraire, parce qu'alors il s'arc-boute contre la dent. Il est cependant nécessaire que la rotation de droite à gauche redevienne possible, quand on veut faire rentrer la crémaillère dans le corps du cric. Pour cela il

suffit de retourner le *doigt* autour du point fixe, de manière à l'adosser aux dents.

109. *Treuil différentiel.* — L'arbre de ce treuil se compose de deux cylindres de même axe, mais de rayons différents : une corde qui embrasse la gorge d'une poulie mobile s'enroule sur le gros cylindre, tandis qu'elle se déroule sur le petit (*fig.* 95). Le poids Q que l'on veut élever est suspendu à la chape de la poulie, et la puissance P est appliquée à une ou à deux manivelles que portent les extré-

Fig, 95.



mités de l'arbre. D'après la théorie de la poulie mobile, les deux brins verticaux de la corde exercent sur les cylindres, dans l'état d'équilibre, des efforts égaux à la moitié du poids Q; et ces efforts tendent à faire tourner l'arbre en sens contraires. Donc, si l'on désigne par R et r les rayons des cylindres, et par p le rayon de la manivelle supposée simple, on aura l'équation

$$Pp = \frac{Q}{2}(R - r);$$

d'où

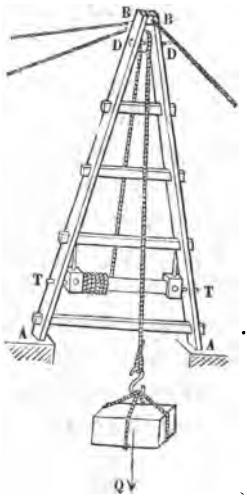
$$\frac{P}{Q} = \frac{R - r}{2p}.$$

Ainsi, la puissance est à la résistance comme *la différence des rayons* des cylindres est au double du rayon de la ma-

nivelle. Plus la différence des rayons des cylindres sera petite, toutes choses égales d'ailleurs, plus la puissance aura d'avantage. Or, cette différence peut être diminuée à volonté, tout en maintenant à l'arbre une épaisseur suffisante pour assurer la solidité de la machine. C'est en cela que le treuil différentiel a de l'avantage sur le treuil ordinaire. Dans celui-ci, on ne pouvait tenir en équilibre une très-grande résistance, à l'aide d'une petite puissance, qu'à la condition ou de réduire le cylindre à un trop faible diamètre, ou d'accroître démesurément la longueur du bras de levier de la puissance.

110. *Chèvre.* — *Grue.* — La chèvre, dans sa construction la plus simple, est représentée *fig.* 96. Elle offre une combinaison du treuil et de la poulie, très-employée dans

Fig. 96.



les ateliers de construction. Deux montants en bois AB, d'égale longueur, réunis l'un à l'autre par des traverses, prennent leur appui sur le sol en AA, et sont maintenus dans une position plus ou moins inclinée par des haubans

qu'on attache à des points fixes voisins. Ces montants supportent une poulie fixe D et un treuil T. Le corps pesant, Q, que l'on veut élever, est suspendu à l'extrémité d'une corde verticale qui vient passer sur la poulie, redescend et fait plusieurs tours sur le cylindre du treuil à la surface duquel elle est finalement attachée. Il est clair que la relation entre la puissance et la résistance, dans cette machine en équilibre, ne diffère pas de celle qui a été établie pour le treuil ordinaire (101), car la corde qui passe sur la poulie D a, dans toute sa longueur, une tension précisément égale au poids Q. Mais on accroîtra l'effet de la puissance en faisant agir la manivelle sur le treuil par l'intermédiaire d'un système de roues dentées analogue à celui de la *fig.* 93. On pourra encore faire intervenir la poulie mobile en suspendant le fardeau, non plus directement à la corde, mais à la chape d'une poulie sous la gorge de laquelle on fera passer la corde qui remontera pour s'attacher à un point fixe.

Une autre machine, qui présente également une combinaison de treuils et de poulies propre à l'élévation des fardeaux, est la *grue*. Ce qui la distingue surtout de la chèvre, c'est qu'après avoir élevé le poids à une hauteur convenable, elle permet de lui imprimer un mouvement horizontal de rotation, avantage précieux quand il s'agit, par exemple, de charger ou de décharger un navire. A cet effet, tout le système des montants qui porte treuils et poulies, au lieu de reposer directement sur le sol, est établi sur une pièce verticale en fonte, de forme cylindrique, qui pénètre dans un massif en maçonnerie et conserve la liberté de tourner sur elle-même.

Les constructeurs en maçonnerie se servent encore, pour élever leurs matériaux, d'une espèce de chèvre, dont le montant est un mât en forme de T, maintenu verticalement par des haubans.

Le lecteur suppléera aisément à la figure.

Une corde enroulée sur le cylindre d'un treuil à engrenages, solidement fixé au sol, s'élève verticalement, passe sur les deux poulies de renvoi que supporte la traverse supérieure du mât, redescend pour embrasser une poulie mobile E à la chape de laquelle est suspendu le fardeau à élever, enfin remonte pour s'attacher à la traverse. La manivelle du treuil est *double*, afin que deux ouvriers puissent agir ensemble aux deux extrémités de l'axe.

Supposons qu'il y ait équilibre, et soient :

P l'effort exercé par chaque ouvrier employé à la manivelle;

Q le poids du fardeau;

T la tension de la corde, qui est la même dans toute sa longueur;

F la pression exercée par la dent du pignon qui engrène avec la roue;

r, r' les rayons du pignon et du cylindre du treuil;

R, R′ les rayons de la manivelle et de la roue.

L'équilibre de chaque partie du système donne les équations

$$2PR = Fr,$$
$$FR' = Tr',$$
$$2T = Q;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$P = Q\,\frac{rr'}{4RR'}.$$

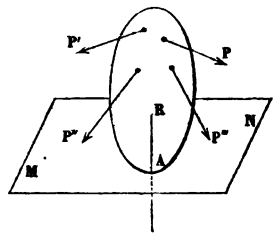
Si la roue a dix fois plus de dents que le pignon, et que le rayon de la manivelle soit cinq fois celui du cylindre, un effort de 10 kilogrammes exercé par chaque ouvrier suffira pour tenir en équilibre un poids de 2000 kilogrammes.

QUATORZIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Plan incliné. — Équilibre d'un corps placé sur un plan incliné.

111. *Corps s'appuyant contre un plan inébranlable par un seul point.* — Considérons un corps sollicité par diverses forces P, P′, P″ en équilibre, et s'appuyant par un seul point A contre un plan inébranlable MN, le long duquel il a la liberté de glisser en tous sens (*fig.* 97). Le plan oppose, au point A du corps, une résistance de direction contraire au mouvement que prendrait ce point si le

Fig. 97.



plan cessait tout à coup d'exister. Nous ne connaissons *à priori* ni la grandeur ni la direction de cette résistance : désignons-la par R, et concevons qu'on l'applique au point A. Comme elle représente l'effet du plan, on pourra supprimer celui-ci et regarder le corps comme entièrement libre. Donc toutes les forces primitives devront avoir une résultante égale et contraire à R. Ce raisonnement ne diffère pas de celui que nous avions déjà fait dans le levier.

Ainsi, il est établi que pour qu'un corps s'appuyant contre un plan inébranlable par un seul point soit en équilibre, toutes les forces appliquées *doivent* avoir une résultante unique passant par ce point. Mais cette condi-

tion *ne suffit pas*. Il s'agit maintenant de savoir quelle devra être la direction de cette résultante.

Si elle est normale au plan, l'équilibre aura évidemment lieu; car, toutes les directions suivant lesquelles le point A peut se mouvoir dans le plan faisant un même angle droit avec la direction de la résultante, il n'y a pas de raison pour que le mouvement naisse d'un côté plutôt que d'un autre. Cette résultante normale, détruite par la résistance du plan, exprimera la *pression* exercée par les forces sur le plan.

Au contraire, si la résultante est oblique au plan, on pourra la décomposer en deux forces, l'une normale, l'autre située dans le plan. La première sera détruite, comme on vient de le voir; mais la seconde aura pour effet de faire glisser le corps sur le plan, à moins que la surface de celui-ci n'oppose au glissement une résistance suffisante.

L'expérience montre que cette résistance au glissement existe et ne peut jamais être complétement supprimée. On la nomme *force de frottement :* il convient de donner dès maintenant quelques explications à cet égard.

112. *Premières notions sur le frottement.* — Toutes les fois que deux corps solides en contact sont pressés plus ou moins fortement l'un contre l'autre, et que, l'un d'eux étant maintenu fixe, on cherche à faire glisser l'autre au moyen d'une force appliquée dans le plan tangent commun, le mouvement ne commence qu'autant que cette force dépasse une certaine limite. Il y a donc une résistance tangentielle, *un frottement* à vaincre. Cette résistance est surtout due aux saillies et cavités que les surfaces des corps, même les mieux polis, présentent toujours, et qui *engrènent* en quelque sorte les unes dans les autres; il y a de plus, dans la région du contact, un refoulement des molécules, d'où résulte une sorte de bourrelet sur lequel le mobile doit s'élever en glissant. Mais on observe que la ré-

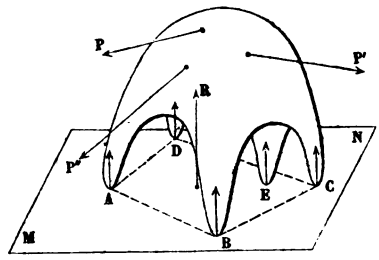
sistance au glissement est d'autant plus faible, que les surfaces en contact sont mieux polies et moins susceptibles de se déformer. On peut donc concevoir des corps solides doués d'un *poli parfait*, pour lesquels le frottement n'existerait plus. C'est dans cette hypothèse que nous allons d'abord raisonner. Toutefois il ne faudra pas perdre de vue que ce cas idéal n'est jamais complétement réalisé dans la nature.

113. *Condition d'équilibre dans le cas d'un poli parfait.* — Revenons à l'équilibre d'un corps appuyé contre un plan par un seul point. Dans l'hypothèse d'un poli parfait, le plan ne pourra détruire qu'une force qui lui soit normale; par conséquent, la condition nécessaire et suffisante d'équilibre sera *que toutes les forces appliquées au corps aient une résultante unique, normale au plan et passant par le point de contact.*

Telle sera aussi la condition générale d'équilibre d'un levier qui ne fait que *poser* sur l'appui fixe. On peut en effet remplacer la surface de contact par le plan tangent au point d'appui, et le raisonnement précédent subsiste sans modification.

114. *Équilibre d'un corps qui s'appuie par plusieurs points contre un plan inébranlable.* — En chacun des

Fig. 98.



points d'appui A, B, C, D, E (*fig.* 98), le plan oppose une

résistance qui est dirigée suivant la normale. En effet, pour rentrer dans le cas précédent, il suffit de concevoir que le plan ne subsiste plus que dans la région du point A, et qu'il soit enlevé dans tous les autres points B, C, D, E, pour être remplacé par des forces égales aux résistances de grandeur et de direction inconnues que le plan opposait en ces points. D'après ce qui précède, le système de toutes les forces qui agissent sur le corps (y compris ces dernières) aura une résultante unique passant par le point A et normale au plan. Or cette résultante est égale et contraire à la résistance qui a lieu en A ; donc celle-ci est normale. Ce que nous venons de dire du point A s'applique à chacun des autres points d'appui.

Maintenant, toutes ces résistances parallèles et de même sens se composeront en une seule force R, dont la direction tombera nécessairement *dans l'intérieur du polygone convexe* ABCD, que l'on peut toujours former avec les points d'appui (sauf à laisser à l'*intérieur* du polygone un ou plusieurs points d'appui, tels que E, qui donneraient lieu à des angles rentrants). Or le corps est dans les mêmes conditions statiques que s'il était libre et soumis à l'action combinée de la force R et des forces appliquées P, P′, P″,.... Donc, *lorsqu'un corps solide s'appuie contre un plan inébranlable par plusieurs points, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que les forces appliquées aient une résultante unique, normale au plan, et dont la direction passe dans l'intérieur du polygone convexe formé par les points d'appui.*

115. *Corps pesant qui repose sur un plan horizontal.* — Si le corps n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, il faudra, pour l'équilibre, que la verticale abaissée de son centre de gravité rencontre le plan dans l'intérieur O de la figure convexe formée par les points d'appui (*fig.* 99). Ces points peuvent d'ailleurs être en nombre infini, auquel cas

le corps touche le plan dans toute l'étendue d'une face plane A*m*B.

Fig. 99.

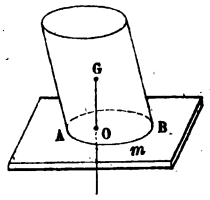
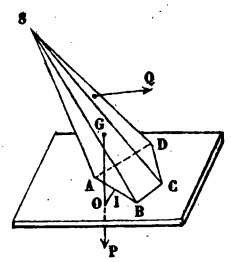


Fig. 100.

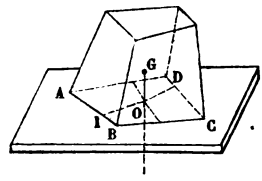


Mais quand le point O, où la verticale du centre de gravité perce la face d'appui, tombera en dehors de cette face, comme dans la *fig.* 100, l'équilibre ne pourra exister. Le corps *fera la bascule,* en tournant autour du côté AB le plus voisin du point O, lequel fera fonction d'axe de rotation.

Dans ce cas, pour retenir le corps en équilibre, on pourrait lui appliquer une certaine force Q telle, que son moment Q*q* par rapport à l'axe AB fût égal et de signe contraire au moment P.OI du poids du corps.

Le même produit P $\times$ OI mesurerait, dans le cas de la *fig.* 101, le moment qu'une force étrangère devrait produire pour *renverser le corps* autour du côté AB. Ce produit varie évidemment avec

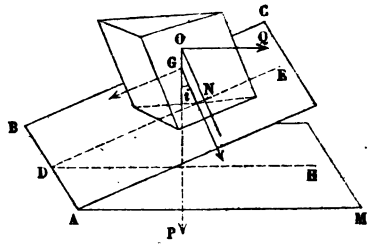
Fig. 101.



l'arête que l'on suppose faire fonction d'axe de rotation. Pris dans sa valeur minimum, on l'appelle *moment de stabilité du corps.*

116. *Équilibre d'un corps pesant qui s'appuie sur un plan incliné.* — Considérons un corps pesant, de figure quelconque, qui s'appuie par une de ses faces sur un plan ABC, incliné à l'horizon (*fig.* 102). Il est d'abord évident que si ce corps est abandonné à l'action de la pesanteur, il ne

Fig. 102.



restera pas en équilibre; car son poids P est une force verticale, qui ne satisfait pas à la condition d'être normale au plan d'appui. On peut décomposer cette force en deux : l'une normale au plan, qui est détruite par sa résistance; l'autre parallèle au plan, qui aura tout son effet pour faire glisser le corps (abstraction faite du frottement).

Soit i l'inclinaison du plan ABC sur l'horizon : le corps glissera en vertu de la composante $P \sin i$. On a donné à cette composante le nom de *pesanteur relative*. Elle peut être réduite à volonté en diminuant l'angle i. L'autre composante $P \cos i$ mesure la *pression normale* supportée par le plan.

117. *Influence du frottement. — Moyen de le mesurer à l'instant où le mouvement commence.* — Si le glissement d'un corps pesant, posé sur un plan incliné, n'a pas toujours lieu, c'est que le frottement n'est jamais complétement négligeable. Il en résulte une force qui peut dans certains cas retenir le corps sur le plan.

Supposons que le plan ABC soit mobile autour de AB comme charnière, en sorte qu'on puisse lui donner graduellement toutes les inclinaisons sur l'horizon.

L'expérience montre d'abord que quand l'inclinaison i est très-voisine de zéro, le corps ne glisse pas : c'est que la force de frottement l'emporte alors sur la composante $P\sin i$. Puis, si l'inclinaison va croissant, il arrive un instant où le glissement commence. Désignons par λ cet angle limite. Le frottement est alors exactement égal à la composante $P\sin\lambda$. Si donc on désigne par f le rapport du frottement à la pression $P\cos\lambda$, on aura

$$f P\cos\lambda = P\sin\lambda,$$

d'où

$$f = \operatorname{tang}\lambda.$$

Cet angle λ a reçu le nom d'*angle de frottement*. Il dépend de la nature et du poli des surfaces en contact. Si l'observation permettait de le mesurer exactement, on en conclurait le *coefficient* f, et la force de frottement serait déterminée. Mais on prévoit que les secousses inévitables qu'éprouve le plan incliné quand on l'élève ou quand on l'abaisse, et qui se communiquent au mobile, doivent solliciter celui-ci à glisser un peu trop tôt. Les valeurs du coefficient f seront donc trop faibles. Ces expériences ont d'abord été faites par Parent; mais c'est au physicien Amontons (1699) que l'on doit les premières notions exactes qu'on ait eues sur le frottement. Il a reconnu, sinon complétement établi, deux lois importantes :

1° La force de frottement est indépendante de l'étendue des surfaces en contact;

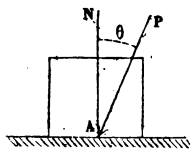
2° Cette force est proportionnelle à la pression que supporte la surface frottante.

Sans entrer dans le détail des procédés d'Amontons, nous nous bornerons à indiquer comment notre plan à inclinaison variable permettrait de constater ces deux lois. Supposons que le corps pesant soit un polyèdre à faces d'étendue inégale, mais d'un égal degré de poli, et qu'on les prenne tour à tour pour faces de contact. Si la première loi est vraie, le corps devra toujours commencer à glisser sous le même angle λ.

Puis, si l'on vient à surcharger le corps de divers poids (sans aller jusqu'à la déformation des surfaces), l'angle λ demeurera également invariable, ce qui mettra en évidence la deuxième loi.

118. *Équilibre d'un corps pressé contre un plan par une force oblique, en ayant égard au frottement.* — Un corps pressé contre un plan par une force P, oblique à ce plan, pourra néanmoins rester en équilibre, tandis que l'obliquité ne sera pas trop grande. En effet, soient A le point où cette force rencontre la face de contact (*fig.* 103), et θ l'angle qu'elle fait avec la normale; cette force

Fig. 103.



se décompose en deux, l'une $P\cos\theta$ qui est la pression normale détruite par la résistance du plan, l'autre $P\sin\theta$ qui tend à entraîner le corps le long du plan. Mais celle-ci est combattue par la force de frottement dont l'expression est $fP\cos\theta$, f désignant le coefficient du frottement relatif aux surfaces en contact. Pour que le glissement n'ait pas lieu, il faut et il suffit que l'on ait

$$fP\cos\theta \geqq P\sin\theta, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\theta \leqq f,$$

ou, vu que $f = \operatorname{tang}\lambda$,

$$\theta \leqq \lambda.$$

Ainsi, pourvu que l'angle θ, que fait la force avec la normale, ne dépasse pas l'angle de frottement, l'équilibre subsistera.

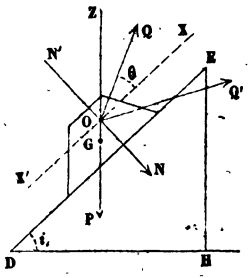
Nous compléterons, dans la Dynamique, l'exposition des lois expérimentales du frottement.

119. *Relations entre le poids d'un corps qui s'appuie contre un plan incliné et la puissance qui le maintient en équilibre.* — Revenons au cas d'un poli parfait, et supposons qu'une puissance Q soit appliquée au corps pesant de la *fig.* 102, pour le maintenir en équilibre.

Les deux forces P et Q devront avoir (114) une résultante normale au plan, et qui passe dans l'intérieur du polygone de contact. La force Q devra donc être dans un

même plan avec la verticale qui passe par le centre de gravité du corps (69); de plus, ce plan QGP renfermera la normale ON. Il sera donc à la fois perpendiculaire au plan horizontal ABM et au plan incliné ABC, et, par suite, il les coupera suivant deux droites DH, DE, qui feront un angle égal à l'inclinaison i du plan ABC sur l'horizon. La figure pourra désormais être réduite à cette coupe verticale (*fig.* 104).

Fig. 104.



Cherchons maintenant la relation qui doit exister entre la puissance Q et le poids P pour qu'il y ait équilibre. Décomposons ces forces, à leur point de concours O, chacune en deux autres dirigées suivant la normale NN′ et la parallèle XX′ au plan incliné. Puisque la résultante doit être normale à ce plan, il faudra que les composantes suivant XX′ se détruisent, tandis que les composantes suivant NN′ s'ajouteront algébriquement pour donner la *pression normale*. Soit θ l'angle de la puissance Q avec OX. L'équation d'équilibre sera

$$P\sin i = Q\cos\theta, \tag{1}$$

et la pression normale sera

$$N = P\cos i - Q\sin\theta.$$

Avant d'aller plus loin, il faut remarquer que la figure

suppose que la puissance Q tire *au-dessus* de OX. Si elle agissait *au-dessous,* dans la direction symétrique OQ′, et que l'on continuât d'appeler θ l'angle Q′OX, l'équation (1) ne serait pas changée; mais la pression normale serait exprimée par $(P\cos i + Q\sin\theta)$, ce qui reviendrait à changer, dans l'expression précédente de N, θ en $-\theta$. Donc, pour comprendre dans les mêmes formules la solution complète de la question qui nous occupe, il suffira de regarder l'angle θ comme positif au-dessus de OX, et comme négatif au-dessous.

Si la puissance Q est donnée en grandeur seulement, l'équation (1) fera connaître l'angle θ sous lequel cette force doit agir. A la valeur

$$\cos\theta = \frac{P\sin i}{Q},$$

répondront deux angles $+\alpha$, $-\alpha$, également admissibles; en sorte que *la même puissance pourra tenir le corps en équilibre, en agissant sous deux directions symétriques par rapport à la parallèle au plan incliné.*

Toutefois, comme un cosinus ne peut dépasser l'unité, il faudra que l'on ait

$$Q > P\sin i \qquad (2)$$

(le signe $>$ n'excluant pas l'égalité); c'est-à-dire que la puissance devra être supérieure ou au moins égale à la *pesanteur relative* le long du plan, chose évidente *à priori.*

De plus, le corps devant être constamment *appuyé contre le plan,* la pression normale N devra être *positive,* en sorte que l'on aura

$$P\cos i - Q\sin\theta > 0. \qquad (3)$$

Cette condition est satisfaite d'elle-même quand la puissance agit *au-dessous* de Ox dans la direction OQ′, puisque le premier membre de l'inégalité (3) devient alors une somme arithmétique. Mais il n'en est pas de même pour

la direction symétrique OQ. Si l'on rapproche l'équation (1) de l'inégalité (3), et qu'on élimine entre elles le rapport $\frac{P}{Q}$, il vient

$$\cos(i+\theta) > 0,$$

d'où

$$i+\theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta < \frac{\pi}{2} - i.$$

Or l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$ n'est autre que ZOX (OZ étant le prolongement de la verticale GP). Ainsi, quand la puissance agit au-dessus du plan incliné, sa direction ne peut s'écarter de la parallèle OX au delà de la verticale OZ. A cette limite, on a

$$\cos\theta = \sin i,$$

et, par suite,

$$Q = P;$$

le corps ne fait que toucher le plan incliné, sans le presser. Cette valeur de Q est la plus grande que puisse avoir la puissance, en tant qu'on demande qu'elle agisse indifféremment sous deux directions OQ, OQ'.

Si l'on suppose

$$Q > P,$$

la puissance ne pourra tenir le corps en équilibre sur le plan qu'autant qu'elle sera dirigée *au-dessous* de la parallèle OX; car, dans l'autre direction, elle soulèverait le corps au-dessus du plan.

La valeur P n'est donc pour la puissance Q qu'un maximum *relatif*. Il n'y a pas de maximum *absolu*. A mesure que l'angle θ croît en s'approchant de 90 degrés, la valeur de Q qui convient à l'équilibre,

$$Q = \frac{P \sin i}{\cos\theta},$$

va en croissant jusqu'à l'infini. Ce résultat se conçoit bien du moment qu'on fait abstraction du frottement : car une force normale au plan, si grande qu'on la suppose, ne saurait empêcher le corps de glisser le long du plan.

Pour donner aux relations entre la puissance et la résistance un énoncé géométrique, on limite ordinairement l'oblique DE et l'horizontale DH par une verticale quelconque EH ; et, dans le triangle rectangle que forment ces lignes, l'hypoténuse DE prend le nom de *longueur du plan* incliné, le côté DH celui de *base* et le côté EH celui de *hauteur*. On a

$$\sin i = \frac{EH}{DE} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} i = \frac{EH}{DH}.$$

Cela posé, *quand la puissance est parallèle au plan incliné,* on a

$$\theta = o \quad \text{et} \quad Q = P \sin i = P \cdot \frac{EH}{DE}.$$

Ainsi, *la puissance parallèle au plan incliné est au poids du corps qu'elle tient en équilibre comme la hauteur du plan est à sa longueur.*

Ce cas est celui où la puissance a le plus d'avantage. Il trouve son application quand on veut faire descendre doucement un corps lourd, un tonneau de vin par exemple, le long d'une rampe. Deux ouvriers engagent sous le tonneau deux cordes qui sont attachées par un bout au haut de la rampe, et dont ils tiennent l'autre bout dans les mains. De cette manière, le tonneau est retenu par quatre cordons parallèles à la rampe ; et il suffit, pour l'équilibre, que l'effort moyen exercé par chaque ouvrier soit le quart du rapport de la hauteur de la rampe à sa longueur.

Quand la puissance est horizontale, on a

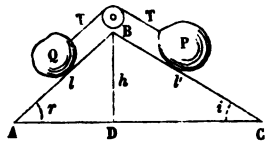
$$\theta = i \quad \text{et} \quad Q = P \operatorname{tang} i = P \cdot \frac{EH}{DH}.$$

Ainsi, *la puissance horizontale est au poids comme la hauteur du plan est à sa base.*

Il ne faut pas perdre de vue que ces résultats sont plus ou moins modifiés par le frottement. Par exemple, quand on a égard à cette force, la théorie apprend que ce n'est plus en agissant parallèlement au plan incliné que la puissance a le plus d'avantage, mais bien en faisant avec le plan un angle égal à l'*angle de frottement* (117).

120. *Plans inclinés adossés.* — Considérons deux corps pesants P, Q appuyés sur deux plans de même hauteur BD (*fig.* 105), mais de longueurs différentes, et liés entre eux par une corde qui passe sur une poulie de renvoi placée au sommet commun B. On

Fig. 105.



suppose que les deux parties de la corde sont parallèles aux plans. Si l'on désigne par T leur tension commune dans l'état d'équilibre, par i et r les inclinaisons des deux plans, on aura

$$T = P\sin i = Q\sin r,$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{BC}{AB}.$$

Ainsi, *les deux poids devront être proportionnels aux longueurs des plans sur lesquels ils reposent.*

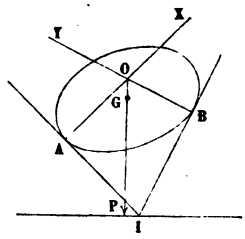
121. *Corps pesant s'appuyant sur deux plans inclinés.* — Pour qu'un corps pesant puisse demeurer en équilibre entre deux plans, son poids doit pouvoir se décomposer en deux forces dirigées normalement vers ces plans, et qui rencontrent chacun d'eux dans l'intérieur du polygone convexe formé par les points d'ap-

pui (114). Ces forces sont les pressions que détruit la résistance des plans.

Supposons, par exemple, que le corps n'ait qu'un point de contact avec chaque plan : les deux normales AX, BY (*fig.* 106) devront être dans un même plan avec la verticale GP qui passe par le centre de gravité du corps, et de plus se rencontrer en un point O de cette verticale. Le plan AOB sera donc à la fois vertical et perpendiculaire aux deux plans donnés. Par conséquent, l'intersection de ces deux plans sera horizontale.

Pour aller plus loin et déterminer la position d'équilibre du corps, il faudra en particulariser la forme (*voir* aux Exercices).

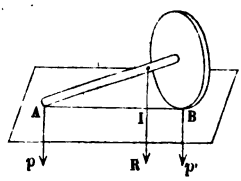
Fig. 106.



122. *Pressions supportées par les points d'appui sur le plan.* — Dans le cas d'un seul point d'appui, on a déjà vu (111) que la pression supportée par ce point est égale à la résultante des forces appliquées.

S'il y a deux points d'appui A, B (*fig.* 107), on n'a qu'à décomposer la résultante normale R (qui doit rencontrer

Fig. 107.

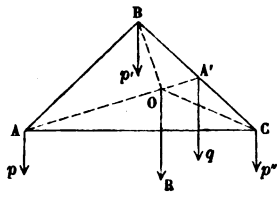


le plan en un point I de AB) en deux forces parallèles p, p' appliquées aux points A et B. Ces forces expriment les

pressions individuelles cherchées. Si l'on représente la résultante R par la droite AB, les pressions sont représentées respectivement par les longueurs BI et AI (32).

S'il y a trois points d'appui A, B, C non en ligne droite, (*fig.* 108) (comme dans le levé à la *planchette* où l'on se sert d'un pied à trois branches), et que O soit le point où la résultante R des forces appliquées va rencontrer le plan fixe, ce point devra être à l'intérieur du triangle ABC ; et l'on pourra d'abord décomposer cette résultante en deux forces parallèles et de même sens appliquées, l'une p au point A, l'autre q au point A′ où la droite AO rencontre BC.

Fig. 108.



Puis cette dernière se décomposera en deux autres parallèles p', p'' appliquées aux points B et C. Calculons les valeurs de ces pressions.

On a

$$p = \mathrm{R}\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{AA'}}.$$

Or, si l'on joint OB et OC, le rapport $\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{AA'}}$ est égal à celui des aires des triangles de même base BOC, BAC. Donc

$$p = \mathrm{R}\frac{\mathrm{BOC}}{\mathrm{ABC}}.$$

Sans passer par l'intermédiaire de la force q, on peut en conclure immédiatement

$$p' = \mathrm{R}\frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{ABC}} \quad \text{et} \quad p'' = \mathrm{R}\frac{\mathrm{AOB}}{\mathrm{ABC}};$$

car, du moment qu'il est établi que la résultante R est décomposable en trois forces *déterminées* p, p', p'', il est clair qu'on peut commencer par celui des trois points d'appui qu'on voudra; et, quel que soit l'ordre suivi dans le calcul, on retrouvera nécessairement les mêmes valeurs pour les pressions individuelles.

Du reste, en passant par la force q, on trouverait successivement

$$q = \mathrm{R}\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AA'}}, \quad p' = q\frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{BC}},$$

d'où

$$p' = \mathrm{R}\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AA'}}\cdot\frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{BC}}.$$

Or, si l'on conçoit BO prolongée jusqu'à la rencontre du côté AC en B', et par le point A' une parallèle à BO, on trouvera sans difficulté, par les triangles semblables,

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AA'}}\cdot\frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{BB'}};$$

et, par suite,

$$p' = \mathrm{R}\frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{BB'}} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{ABC}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En conséquence, *si l'on représente la résultante des forces appliquées par l'aire du triangle que forment les points d'appui, les pressions supportées par ces points seront représentées respectivement par les aires des triangles partiels qui ont pour bases les côtés opposés et pour sommet commun le point d'application de la résultante.*

Corollaire. — Si l'on prolonge BO et CO jusqu'à leurs rencontres avec les côtés opposés en B' et C', et que l'on ait égard à l'équation

$$p + p' + p'' = \mathrm{R},$$

on aura

$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{AA'}} + \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{BB'}} + \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{CC'}} = ,$$

nouvel exemple d'un théorème de Géométrie démontré par des considérations de Mécanique.

En se plaçant au point de vue géométrique, on peut demander ce que deviendrait la relation précédente, si le point O était pris à l'*extérieur* du triangle ABC (*fig.* 109). Pour répondre à cette question, on imaginera qu'une force R, appliquée à ce point, soit décomposée en deux autres parallèles et de *sens contraires*, appliquées l'une en A, l'autre en A'. La relation sera simplement modifiée en ce que le rapport $\left(\frac{OA'}{AA'}\right)$, qui correspond *au côté à l'extérieur duquel est le point* O, changera de signe. Il pourra arriver que deux rapports changent ainsi de signe à la fois. (*Voir* aux Exercices.)

Fig. 109.

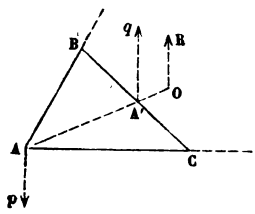
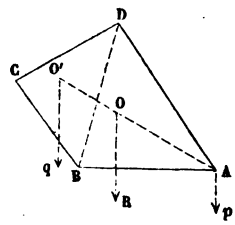


Fig. 110.



Quand il y a *plus de trois points d'appui, ou seulement trois en ligne droite*, la question qui a pour objet de rechercher les pressions individuelles devient *indéterminée*. En effet, considérons par exemple le cas où le corps s'appuie sur le plan par quatre points A, B, C, D (*fig.* 110). Soit O le point où la résultante R des forces appliquées rencontre le plan. Joignons AO, et prolongeons cette droite jusqu'à un point O' *arbitraire*, mais *situé dans l'intérieur* du triangle BCD; puis décomposons la force R en deux autres parallèles p, q appliquées aux points A et O'. La pression p participera de l'indétermination du point O' : on pourra, si l'on veut, se donner cette force, et le point O' s'ensuivra. Dès lors, la composante $q = R - p$ se décomposera, comme on l'a vu plus haut, en trois forces *dé-*

terminées, parallèles et de même sens, appliquées aux points B, C, D. Il résulte de là qu'on peut prendre à volonté, entre certaines limites, l'une des quatre pressions, et qu'alors les trois autres s'ensuivent.

En général, on peut se donner, d'une infinité de manières, toutes les pressions individuelles *moins trois*.

123. *Remarque sur le cas d'indétermination des pressions.* — Dans la nature, lorsqu'un corps s'appuie contre un plan, les pressions que supportent les points d'appui sont toujours déterminées, quel qu'en soit le nombre, ce qui paraît en contradiction avec la théorie précédente. Mais, en y réfléchissant, on s'explique l'indétermination que nous venons de rencontrer : elle tient à ce que, pour simplifier le problème, nous avons fait abstraction d'une propriété essentielle de la matière, la compressibilité : or il n'existe pas de plan rigoureusement inflexible. Par exemple, lorsqu'une table s'appuie sur un parquet par quatre pieds, celui-ci fléchit et se déforme un tant soit peu; et les pressions qui ont lieu aux points d'appui sont en relation nécessaire avec cette flexion que nous avons négligée.

Nous ne nous arrêterons pas à exposer comment les pressions que supportent les points d'appui pourraient être calculées à l'aide des six équations générales de l'équilibre. La méthode a déjà été exposée (103) dans le cas de deux points fixes, et le lecteur pourra s'exercer à l'appliquer au cas général. On retrouvera l'indétermination qui vient d'être signalée quand il y a plus de trois points d'appui, et même quand il n'y en a que trois s'ils tombent en ligne droite.

EXERCICES.

I. Un corps pesant P est posé sur une table horizontale inflexible, qui s'appuie par trois pieds sur un terrain inébranlable. On donne le poids π et le centre de gravité de la table, et les pressions *maximum* R, R′, R″ que les pieds peuvent supporter sans se rompre. On demande :

1° La position du corps étant donnée sur la table, quelle est la plus grande valeur que son poids P puisse avoir;

2° Le poids P étant donné, quelle est la région qui renferme tous les points de la table où il peut être placé, sans que les pieds se rompent.

II. Un point O étant pris à volonté dans l'intérieur d'une pyramide triangulaire ABCD, on le joint à chacun des sommets par les droites AO, BO, CO, DO, qui rencontrent les faces opposées en des points A′, B′, C′, D′; et l'on propose de démontrer, par des considérations empruntées à la Statique, qu'on a

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

III. Une voiture à deux roues est traînée par un cheval, sur une route dont la *pente*, c'est-à-dire la tangente trigonométrique de l'inclinaison sur l'horizon, est $\frac{1}{20}$. La charge, y compris le poids de la charrette, est de 1000 kilogrammes; et l'on suppose que, *dans la position horizontale* des limons, le centre de gravité de cette charge serait situé sur la verticale qui passe par le milieu de l'essieu, à $1^m,20$ au-dessus de cette ligne. Enfin la distance de l'essieu à la droite qui joint les deux points d'attache du cheval aux limons est de 4 mètres. On demande d'évaluer :

1° Les portions de la charge que supportent le cheval et les deux roues;

2° Les composantes de ces forces suivant les directions parallèles et normales à la route.

IV. Placer en équilibre une tige homogène pesante, de longueur donnée, entre deux plans inclinés. Condition que doivent remplir les plans :

1° Pour que la tige soit horizontale;

2° Pour que la verticale de son centre de gravité tombe sur l'intersection des plans.

V. Placer un rectangle homogène pesant en équilibre entre deux plans inclinés, en le faisant poser :

1° Par deux côtés opposés;

2° Par deux sommets opposés;

3° Par deux sommets adjacents à un même côté.

Extension du troisième cas à un polygone plan quelconque, dont le centre de gravité est donné.

VI. Un corps de poids Q a été mis en équilibre sur un plan incliné d'un angle i à l'horizon, à l'aide d'une force P qui fait avec ce plan un angle θ. — L'inclinaison i ayant été réduite de α degrés, sans que la direction de la force P ait été modifiée, il a fallu, pour maintenir l'équilibre du corps, réduire l'intensité de cette force de a unités. On propose de prendre successivement pour inconnues deux des quantités désignées ci-dessous,

$$(P, \theta), \quad \text{ou} \quad (Q, i), \quad \text{ou} \quad (Q, \theta),$$

et d'en discuter les valeurs.

VII. Déterminer l'état d'équilibre, le plus prochain du glissement, pour une échelle qui repose par son extrémité inférieure sur un plancher horizontal et s'appuie par le haut contre une cloison verticale. — On a égard au frottement, et l'on suppose que le rapport du frottement à la pression soit le même pour le plancher que pour la cloison d'appui (0,36 par exemple).

(L'échelle étant symétrique par rapport à la droite qui joint les milieux des échelons, on peut la réduire à cette droite, supposée pesante mais *non homogène;* et si l'on introduit les pressions inconnues qui ont lieu aux deux extrémités, on n'a plus qu'à appliquer les trois équations d'équilibre des forces situées dans un même plan. — En désignant par k le rapport de la longueur de l'échelle à la distance de son centre de gravité à l'extrémité inférieure, par α l'inclinaison *limite* de l'échelle sur l'horizon, par f le coefficient de frottement, on trouvera

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1+f^2}{kf} - f,$$

valeur à discuter.)

VIII. Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, on suppose que le montant de l'échelle ait 15 échelons, équidistants de 20 centimètres les uns des autres, plus deux bouts libres, l'un inférieur long de 25 centimètres, l'autre supérieur de 15 centimètres; que le poids de l'échelle soit de 10 kilo-

grammes et son centre de gravité au tiers de la longueur à partir de la base; enfin qu'un ouvrier, dont le poids est de 70 kilogrammes, monte sur les divers échelons. Le coefficient f étant pris égal à 0,36, on demande d'assigner pour chacune des positions de l'ouvrier la limite d'inclinaison au-dessous de laquelle l'échelle commencera à glisser.

TROISIÈME PARTIE.

ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE ET DE DYNAMIQUE.

QUINZIÈME ET SEIZIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Mouvement rectiligne uniforme. — Vitesse. — Mouvement rectiligne varié. — Vitesse moyenne. — Vitesse à un instant quelconque. — Mouvement rectiligne uniformément varié. — Accélération. — De l'accélération à un instant quelconque dans le mouvement rectiligne varié. — Composition de deux mouvements simultanés rectilignes, uniformes ou uniformément variés. — Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. — Vitesse angulaire.

124. *De la Cinématique. — Du temps et de sa mesure.* — Pour établir les lois de l'équilibre, nous n'avons pas eu besoin de connaître le genre de mouvement que les forces seraient capables d'imprimer à leurs points d'application, s'ils étaient libres. Mais il n'en est plus de même quand il s'agit d'étudier l'action des forces sur un corps en mouvement.

Avant tout, il est nécessaire de considérer le mouvement *en lui-même,* c'est-à-dire indépendamment des forces qui peuvent le produire ou le modifier. Ampère, dans son système de classification des sciences (*), a désigné sous le nom de *Cinématique* (de κινημα, ατος, mouvement) cette partie de la Mécanique générale, dont nous allons exposer les éléments.

Il ne faut pas confondre la Cinématique avec l'étude du simple *déplacement géométrique*. En Géométrie, on fait

(*) *Essai sur la philosophie des sciences;* 1834.

souvent mouvoir, suivant certaines conditions, des points pour engendrer des lignes, des lignes données pour engendrer des surfaces, et des surfaces données pour engendrer des solides. En Mécanique, il entre un élément de plus, c'est le *temps* nécessaire au mobile pour passer d'une position à une autre dans l'espace.

On ne définit pas le *temps,* non plus que l'espace. Mais la *durée* d'un phénomène est susceptible de mesure : il suffit de bien établir la notion de *temps égaux*.

Concevons, à cet effet, que des corps pesants, parfaitement identiques, soient suspendus à des points fixes, par des fils de même longueur, et dans le même lieu : après avoir écarté ces pendules de la verticale, d'une même quantité, on les abandonne successivement à eux-mêmes, de sorte que le second parte à l'instant précis où le premier a terminé sa première double oscillation, le troisième à l'instant où le second a accompli la sienne, et ainsi de suite. Il est évident que, *quelle que soit la loi de ces mouvements,* il n'y aura aucune différence possible entre le premier et le second, le second et le troisième, etc., et, par conséquent, qu'ils s'accompliront dans des intervalles de temps rigoureusement égaux.

On prend pour unité de temps, en Astronomie, le *jour sidéral,* dont l'invariabilité est constatée par l'observation. Dans les usages ordinaires de la vie, c'est le *jour solaire moyen* qui est pris pour unité : sa durée est également constante. On la divise en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes. La seconde est l'unité usuelle de la Dynamique : c'est la 86400^{e} partie du jour moyen.

125. *Équation du mouvement rectiligne et uniforme. — Remarques sur les signes et sur les unités.* — Le plus simple de tous les mouvements que puisse prendre un point matériel est celui qui a lieu *en ligne droite*, et dans lequel

les espaces parcourus en temps égaux sont égaux, quelque petits que soient ces temps. Ce mouvement est dit *rectiligne et uniforme.*

L'espace parcouru dans l'unité de temps mesure ce qu'on appelle la *vitesse* du mobile. Il revient au même de dire que la vitesse est mesurée par le rapport de l'espace parcouru dans un temps quelconque à ce temps.

Soient t le temps compté à partir d'une époque convenue; x la distance qui sépare le mobile, au bout du temps t, d'un point fixe pris sur la droite qu'il décrit; x_0 la distance initiale du mobile à ce point fixe, c'est-à-dire la valeur de x qui répond à $t = 0$; a la vitesse. at sera l'espace décrit dans le temps t. Mais cet espace est aussi représenté par $x - x_0$; l'équation du mouvement uniforme sera donc

$$x = x_0 + at. \tag{1}$$

Pour qu'elle convienne à toutes les positions du mobile, il faut regarder x et x_0 comme des quantités positives ou négatives, suivant que ces distances sont comptées d'un côté du point fixe, ou du côté opposé. La variable t devra elle-même recevoir des valeurs négatives, quand on voudra remonter à des époques *antérieures* à l'origine du temps.

Enfin, si la vitesse a, considérée jusqu'ici comme une grandeur absolue, vient à changer de sens, c'est-à-dire à prendre une direction opposée à celle des x positifs, on devra aussi l'affecter du signe —.

Ces remarques sur les signes sont importantes. Nous engageons le lecteur à passer en revue, sur l'équation (1) ainsi généralisée, les divers cas du mouvement uniforme : il y trouvera un nouvel exemple (37, 41) de l'utilité des quantités négatives pour comprendre dans une même formule toutes les circonstances qu'une question peut offrir.

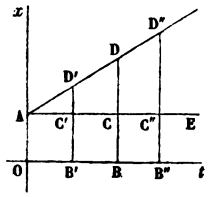
Deux unités entrent dans l'équation (1) : l'unité de longueur et l'unité de temps. La vitesse a dépend évidemment de chacune d'elles : si l'unité de longueur vient à changer,

qu'elle passe par exemple du mètre au décimètre, les nombres x, x_0, a seront tous multipliés par 10, et l'équation (1) ne cessera pas de subsister; si l'unité de temps vient à changer, qu'elle passe par exemple de la seconde à la minute, ce changement affectera les deux nombres a et t seulement; t deviendra $\frac{t}{60}$, a deviendra $a \times 60$, et l'équation (1) n'en sera pas encore troublée.

Remarquons enfin que le rapport des vitesses de deux mouvements uniformes reste invariable, quand on change les unités de longueur ou de temps.

126. *Tracé géométrique : espace et vitesse.* — Traçons deux axes rectangulaires Ot, Ox (*fig.* 111), et après avoir choisi une certaine longueur, le millimètre par exemple, pour figurer les unités de temps et de chemin, convenons de porter, à partir de O, sur l'axe Ot, des longueurs qui représenteront les temps écoulés depuis l'origine du mouvement, et sur l'axe Ox des longueurs qui représenteront à la même échelle les distances du mobile à un point fixe pris sur la droite qu'il décrit. Soient OA la distance x_0 qui répond à $t = 0$, OB une certaine valeur de t, et BD la valeur correspondante de x comptée sur une parallèle à

Fig. 111.



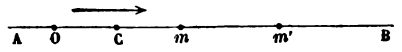
l'axe Ox. Le segment DC, qui est situé au-dessus de la parallèle à l'axe Ot menée par le point A, représentera l'espace décrit *durant* le temps t; et le rapport $\frac{DC}{CA}$ (ou simple-

ment la longueur DC, si l'on suppose que AC soit l'unité de temps) mesurera la vitesse. La droite AD, indéfiniment prolongée, sera le lieu géométrique des extrémités de toutes les ordonnées B′D′, B″D″,..., et son inclinaison sur l'axe Ot, variable d'un mouvement uniforme à un autre, rendra sensible aux yeux la vitesse plus ou moins grande du mouvement. Si par exemple OB = 16 et CD = 24, on en conclura que le mobile a parcouru 24 mètres en 16 secondes, ou que sa vitesse est de $\frac{24}{16} = 1^{m},5$ par seconde.

Il est entendu que les valeurs négatives de x ou de t se porteront sur chaque axe, dans un sens opposé à celui des valeurs positives à partir de l'origine.

127. *Mouvement varié. — Vitesse à un instant quelconque.* — Le mouvement rectiligne est dit *varié,* quand le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir change continuellement. Soient AB la ligne indéfinie décrite par le mobile (*fig.* 112), m sa position au bout du temps t, m' sa position au bout du temps $t + h$, O un point fixe, pris sur AB, à partir duquel on convient de compter les distances, positives dans le sens OB, négatives dans le sens OA; désignons Om par x, Om' par x', mm' ou $x' - x$ sera, en grandeur et en signe, l'espace parcouru dans le temps h. Le rapport $\frac{x' - x}{h}$ est ce qu'on appelle la *vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps h.* C'est aussi la vitesse du mouvement uniforme, en vertu du-

Fig. 112.



quel le mobile parcourrait le même espace dans le même intervalle de temps. Ce rapport dépend à la fois de l'époque t et de l'intervalle h. Si l'on suppose que h diminue

jusqu'à zéro, $x' - x$ diminue aussi indéfiniment, et le rapport $\frac{x'-x}{h}$, qui ne cesse pas de représenter la vitesse moyenne, tend vers une limite déterminée qu'on appelle la *vitesse au bout du temps t*. Désignons-la par v. Ainsi, par définition,

$$v = \lim \frac{x'-x}{h},$$

pour $h = 0$.

Supposons, par exemple, que x soit une fonction entière et du deuxième degré du temps,

$$x = at^2 + bt + c,$$

a, b, c étant des constantes données. Si l'on change t en $t + h$, on aura

$$x' = a(t+h)^2 + b(t+h) + c;$$

d'où

$$x' - x = a(2ht + h^2) + bh,$$

et

$$\frac{x'-x}{h} = a(2t+h) + b.$$

Telle est la vitesse moyenne : elle dépend de t et de h.

Si l'on fait tendre h vers zéro, il vient

$$\lim \frac{x'-x}{h} \quad \text{ou} \quad v = 2at + b.$$

Telle est la vitesse du mobile au bout du temps t. On voit que la constante b représente la vitesse *initiale*, c'est-à-dire celle qui répond à l'époque $t = 0$, et que la constante $2a$ est l'accroissement de vitesse qui a lieu dans chaque unité de temps. Quant à la troisième constante c qui entrait dans la fonction proposée, elle exprimait évidemment la distance initiale du mobile au point O; mais la vitesse v en est indépendante.

Nous reviendrons bientôt sur ce cas intéressant du mou-

vement varié, qui est celui de la chute des corps dans le vide.

On sait que la limite du rapport de l'accroissement d'une fonction x à l'accroissement de la variable t, lorsque ce dernier tend vers zéro, a reçu le nom de *dérivée de la fonction*. En la désignant par $d_t x$, nous aurons généralement

$$v = d_t x.$$

Ainsi, *la vitesse à un instant quelconque est la dérivée de l'espace parcouru considéré comme fonction du temps,* ou encore *la dérivée de la distance du mobile à un point fixe pris sur la ligne qu'il décrit,* laquelle ne diffère de l'espace parcouru que par une constante (*).

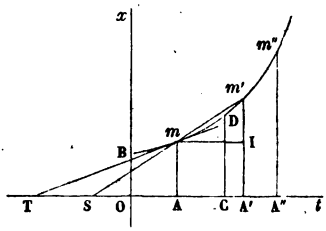
128. *Tracé géométrique.* — Souvent il arrive que l'espace x n'est pas connu en fonction du temps, mais que l'on a seulement une *table de valeurs numériques,* fournies par l'expérience et correspondantes à un certain nombre de positions du mobile. Si ces positions sont suffisamment rapprochées, on peut recourir avec avantage au tracé déjà employé (126). Soient Am, $A'm'$, $A''m''$,... (*fig.* 113) les ordonnées parallèles à l'axe Ox, qui représentent, à une échelle convenue, les distances comptées à partir d'un point fixe sur la ligne que décrit le mobile ; OA, OA', OA'' les valeurs correspondantes du temps. La longueur OB, portée sur Ox, représentera la distance initiale du mobile au point fixe. Si l'on joint tous les points B, m, m', m'',... par un trait continu, on aura une courbe propre à fournir, avec plus ou moins d'approximation :

1° L'*espace parcouru* par le mobile au bout d'un temps quelconque, compris entre les limites de l'observation :

(*) En général, la dérivée d'une fonction entière de t s'obtient en multipliant chaque terme par l'exposant de t dans ce terme, diminuant cet exposant d'une unité, et faisant la somme algébrique des résultats. Nous admettrons cette règle comme démontrée dans le Cours d'Algèbre.

soit OC ce temps; il suffira de tracer par le point C une parallèle à Ox jusqu'à la rencontre de la courbe, puis de mesurer à l'échelle la longueur CD.

Fig. 113.



2° La *vitesse* à un instant quelconque : soit m le point dont il s'agit; menons mI parallèle à l'axe Ot, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée du point m'; la vitesse au point m est, comme on sait, la limite du rapport $\frac{m'I}{mI}$, lorsque mI tend vers zéro. Or, si S est le point où la sécante $m'm$ va rencontrer l'axe Ot, on a

$$\frac{m'I}{mI} = \frac{mA}{AS};$$

et, quand le point m' se rapproche indéfiniment de m, la sécante mm' tend vers une direction limite mT qui est la tangente à la courbe au point m. Donc

$$\lim \frac{m'I}{mI} \quad \text{ou} \quad v = \frac{mA}{AT}.$$

Ainsi, la vitesse au point m a pour mesure le *rapport de l'ordonnée de ce point à la sous-tangente.*

On peut encore dire, si l'on suppose les axes rectangulaires, que la vitesse est mesurée par *la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente avec l'axe* Ot. Car $\frac{mA}{AT} = \text{tang} mTA$.

Si la courbe $mm'm''$ dégénère en une ligne droite, le

mouvement devient uniforme. Dans le cas contraire, il est varié.

A la simple intuition de la courbe, on verra si le mouvement varié est *accéléré* ou *retardé*, c'est-à-dire si la vitesse est croissante ou décroissante. En effet, quand la courbe tournera, comme dans la *fig.* 113, sa *convexité* vers l'axe Ot, l'angle *aigu* de la tangente avec cet axe ira évidemment en croissant dans le sens $mm'm''$, qui est celui du mouvement. Ce sera le contraire, si la courbe présente sa *concavité* vers l'axe Ot. Ainsi le mouvement sera accéléré ou retardé, selon que la courbe sera convexe ou concave vers l'axe sur lequel on compte les temps.

129. *Mouvement direct, rétrograde.* — Les conclusions précédentes devront être renversées si le mouvement, au lieu d'être *direct*, c'est-à-dire tel, que les distances du mobile au point fixe pris sur la ligne qu'il décrit croissent avec le temps, devient *rétrograde*.

En se reportant à la définition de la vitesse v,

$$v = \lim \frac{x' - x}{h},$$

on voit que le numérateur $x' - x$ change de signe quand le mouvement, d'abord direct, devient rétrograde. D'ailleurs le dénominateur h est un accroissement essentiellement positif. Donc la vitesse v change de signe avec le sens du mouvement : positive s'il est direct, elle est négative s'il devient rétrograde.

Ce changement de signe ne peut avoir lieu qu'autant que la fonction v passe par zéro, et il correspond à un *maximum* de la fonction x.

130. *Simples notions sur le mouvement curviligne.* — *Vitesse; sa grandeur, sa direction.* — Bien que nous ayons spécialement en vue, dans ce Cours élémentaire, l'étude du mouvement *rectiligne*, il est à propos de remarquer que

l'expression de la vitesse qui vient d'être donnée s'applique sans modification au mouvement *curviligne*, c'est-à-dire à celui dans lequel le mobile décrit une ligne courbe quelconque. Les espaces parcourus sont alors des *longueurs d'arcs*.

Ainsi la vitesse d'un mouvement curviligne uniforme est la longueur constante de l'arc décrit dans l'unité de temps. La vitesse au bout du temps t, dans le mouvement curviligne varié, est la limite vers laquelle tend le rapport de l'arc décrit pendant l'intervalle h qui succède au temps t, à ce même intervalle, lorsque celui-ci tend vers zéro, c'est-à-dire la dérivée de l'espace parcouru considéré comme fonction du temps.

Seulement, il y a ici un élément de plus à considérer : c'est la *direction* de la vitesse, qu'on appelle aussi la direction du mouvement. Or, si l'on substitue pour un instant à la courbe décrite un polygone inscrit qui s'en rapproche indéfiniment, la limite de la direction du mouvement rectiligne du mobile, considéré comme décrivant ce contour polygonal, est la tangente en chaque point de la courbe. On prend donc pour direction de la vitesse au point m celle de la tangente en ce point.

131. *Mouvement rectiligne et uniformément varié. — Accélération.* — Le mouvement uniformément varié est celui dans lequel la vitesse augmente ou diminue de quantités égales en temps égaux. Si la vitesse augmente avec le temps, le mouvement est dit *uniformément accéléré* et, dans le cas contraire, *uniformément retardé*. Nous en avons déjà rencontré un exemple (127).

Soient a l'accroissement, positif ou négatif, de la vitesse dans chaque unité de temps, et v_0 la vitesse initiale, la vitesse v à un instant quelconque sera

$$v = v_0 + at. \tag{1}$$

La constante a a reçu le nom d'*accélération*.

Connaissant la loi suivant laquelle la vitesse varie avec le temps, nous allons montrer comment on en déduit la loi suivant laquelle varie l'espace parcouru.

On a vu que la vitesse est la *dérivée* de la fonction du temps qui représente l'espace. Il s'agit donc de remonter à la fonction de t qui a pour dérivée $(v_0 + at)$. La règle à suivre est une conséquence immédiate de celle que nous avons admise (127, note), pour la dérivée des fonctions entières d'une seule variable; elle consiste à augmenter d'une unité l'exposant de t dans chaque terme, à diviser ce terme par le nouvel exposant, enfin à ajouter une *constante arbitraire* à la somme des résultats. On aura donc, pour la distance x du mobile à un point fixe pris sur la droite qu'il décrit,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}; \tag{2}$$

x_0 désigne la constante arbitraire, qui n'est autre que la distance du mobile au point fixe, à l'époque $t = 0$.

On donne souvent, dans les Cours de physique, une démonstration de l'équation (2), qui n'exige pas la connaissance du calcul des dérivées des fonctions entières; mais elle est plus longue.

Concevons que le temps t, pendant lequel le mobile s'est transporté de c en m (*fig.* 112), soit partagé en un très-grand nombre n d'intervalles égaux, et soit h leur durée commune, en sorte que

$$t = nh.$$

Pendant chacun de ces petits intervalles, on peut supposer que le mobile s'est mû avec une vitesse constante égale à celle qui l'animait à l'origine de cet instant; et cette hypothèse se rapprochera d'autant plus de la réalité que le nombre n sera plus grand.

Or les vitesses de cette suite de mouvements uniformes sont évidemment

$$v_0, \quad v_0 + ah, \quad v_0 + 2ah, \ldots, \quad v_0 + (n-1)ah;$$

et les espaces parcourus correspondants

$$v_0 h, \quad v_0 h + ah^2, \quad v_0 h + 2ah^2, \ldots, \quad v_0 h + (n-1)ah^2.$$

La somme de ces espaces

$$v_0 nh + ah^2 \frac{n(n-1)}{2},$$

ou

$$v_0 t + \frac{at^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

représentera, lorsqu'on y fera croître n à l'infini, l'espace $x - x_0$ réellement décrit par le mobile. Mais, à la limite, $\frac{1}{n}$ disparaît, et il vient

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on convient de placer l'origine des distances au point de départ du mobile, x_0 sera nulle, et l'on aura

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{3}$$

Des équations (1) et (2) on déduit aisément

$$x = \frac{v + v_0}{2} t,$$

ce qui montre que l'espace parcouru depuis l'origine du mouvement jusqu'à une époque quelconque est le même que si le mobile eût été animé d'une vitesse *constante*, égale à la moyenne arithmétique des vitesses initiale et finale.

132. *Du mouvement uniformément accéléré.* — Considérons en particulier le cas du mouvement uniformément accéléré. La constante a est alors positive.

Si le mobile part de l'origine, sans vitesse initiale, on a

$$x_0 = 0, \quad v_0 = 0,$$

et les équations (1) et (3) se réduisent à

$$v = at, \quad x = \frac{at^2}{2}.$$

La vitesse est alors proportionnelle au temps et l'espace proportionnel au carré du temps. L'une de ces deux lois entraîne l'autre.

Corollaires. — I. Si l'on compare entre eux les espaces parcourus *pendant* les unités de temps successives, on voit qu'ils croissent comme la série des nombres impairs 1, 3, 5, 7,.... En effet, l'espace parcouru pendant la $(t+1)^{ième}$ unité de temps est

$$\frac{a}{2}[(t+1)^2 - t^2],$$

ou simplement

$$\frac{a}{2}(2t+1).$$

II. La vitesse a, acquise au bout de la première unité de temps, est double de l'espace parcouru dans ce même intervalle.

III. Si on élimine t entre les deux équations, il vient

$$v = \sqrt{2ax}.$$

Ainsi la vitesse à un instant quelconque est moyenne géométrique entre le double de l'accélération et l'espace parcouru.

133. *Chute des corps dans le vide.* — La chute des corps dans le vide offre un exemple du mouvement uniformément accéléré. L'expérience apprend que si l'on abandonne un corps librement à lui-même dans le vide, quelles que soient sa substance et ses dimensions, tous ses points décrivent des droites verticales avec des vitesses égales, et que les espaces ainsi parcourus sont proportionnels aux carrés des temps. Il en résulte que les vitesses croissent

proportionnellement aux temps. Ces deux lois peuvent d'ailleurs être vérifiées directement au moyen de la machine d'Atwood. Toutefois, il se présente, dans la vérification de la loi des vitesses, une difficulté que nous éclaircirons plus loin (146).

L'accélération de ce mouvement varie d'un lieu à un autre : on la désigne par la lettre g. Sa valeur à l'Observatoire de Paris, d'après les mesures de Borda et des savants contemporains, est

$$g = 9^{m},8088,$$

la seconde étant prise pour unité de temps. L'espace parcouru, en chute libre, dans la première seconde, est moitié du nombre précédent, soit $4^{m},9$ environ.

Si un corps tombe d'une hauteur h, la vitesse qu'il acquiert par cette chute est $\sqrt{2gh}$. On a dressé une Table des valeurs de ce radical qui répondent à diverses hauteurs. Cette Table est très-utile dans la Mécanique appliquée Nous en extrayons quelques nombres :

Hauteurs de chute.	Vitesses.
m	m
0,20	2,00
0,46	3,00
0,81	4,00
1,00	4,43
1,27	5,00
1,83	6,00
2,00	6,26
2,50	7,00
3,00	7,67
3,26	8,00
4,00	8,86
4,13	9,00
5,00	9,90

134. *Du mouvement uniformément retardé.* — Dans le

cas d'un mouvement uniformément retardé, la constante a doit être regardée comme négative, ce qui revient à changer a en $-a$ dans les équations (1) et (2), puis à donner à a des valeurs positives. En plaçant l'origine des x au point de départ, on aura

$$v = v_0 - at,$$

$$x = v_0 t - \frac{at^2}{2};$$

le mouvement sera direct et x croîtra avec t, tant que la vitesse sera positive, c'est-à-dire tant que l'on aura $v_0 > at$. La vitesse v s'annulera au bout d'un temps égal à $\frac{v_0}{a}$; à cet instant, x atteindra son maximum $\frac{v_0^2}{2a}$. Le temps continuant à croître, la vitesse deviendra négative et le mouvement rétrograde. x ira en décroissant jusqu'à l'infini négatif; mais des obstacles physiques limiteront, dans l'application, l'étendue des valeurs de cette variable.

Lorsqu'un corps est lancé verticalement de bas en haut, dans le vide, il prend un mouvement uniformément retardé. Sa vitesse initiale v_0 diminue, au bout de chaque seconde, de la quantité constante $g = 9^{m},8088$. Les formules précédentes sont donc applicables.

Au bout du temps $\frac{v_0}{g}$, la vitesse est réduite à zéro; le mobile a atteint sa hauteur maximum $\frac{v_0^2}{2g}$. Il redescend alors, d'un mouvement uniformément accéléré, et retrouve son point de départ au bout du temps $\frac{2v_0}{g}$, pour lequel $x = 0$. En même temps on a $v = -v_0$. Le temps qu'il met à descendre est donc le même que celui qu'il a mis à monter; et sa vitesse, en arrivant à terre, est égale et de signe contraire à celle qu'il avait au départ.

135. *De l'accélération à un instant quelconque dans le mouvement rectiligne varié.* — La notion d'accélération s'étend du mouvement uniformément varié au mouvement rectiligne varié quelconque, de la même manière que la notion de vitesse a été étendue (127) du mouvement uniforme au mouvement varié.

Soient v la vitesse du point matériel au bout du temps t, v' sa vitesse au bout du temps $t+h$; le rapport

$$\frac{v'-v}{h}$$

(positif ou négatif, selon que la vitesse est croissante ou décroissante) est ce qu'on peut appeler l'*accélération moyenne pendant l'intervalle de temps h.* C'est aussi l'accélération du mouvement *uniformément varié,* en vertu duquel le mobile acquerrait le même accroissement de vitesse dans le même intervalle de temps.

Ce rapport dépend à la fois de la variable t et de l'accroissement arbitraire h. Lorsque h tend vers zéro, $v'-v$ diminue aussi indéfiniment, et le rapport $\frac{v'-v}{h}$, qui n'a pas cessé de représenter l'accélération moyenne, tend vers une limite déterminée, qu'on appelle l'*accélération au bout du temps t.* En la désignant par φ, on a donc

$$\varphi = \lim \frac{v'-v}{h},$$

pour $h=0$.

Ainsi, dans le mouvement rectiligne varié, l'*accélération à un instant quelconque est la dérivée de la vitesse considérée comme fonction du temps.* D'après la notation déjà adoptée (128), nous écrirons

$$\varphi = d_t v.$$

Comme v est déjà la dérivée première de l'espace parcouru

considéré comme fonction du temps, on dit que φ est la *dérivée seconde* du même espace. De là cette nouvelle expression de φ

$$\varphi = d_t^2 x.$$

136. *Dépendances mutuelles de l'espace parcouru, de la vitesse et de l'accélération dans le mouvement rectiligne varié.* — En résumé, on voit que les trois grandeurs, espace parcouru, vitesse, accélération, sont subordonnées entre elles de la manière suivante : soient x la fonction du temps t qui représente l'espace parcouru par le point matériel, v et φ la vitesse et l'accélération au même instant ; on a

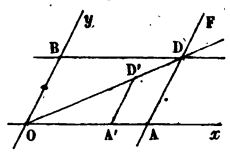
$$v = d_t x, \quad \varphi = d_t v = d_t^2 x.$$

137. *Composition de deux mouvements simultanés rectilignes et uniformes. — Vitesse du mouvement résultant. — Parallélogramme des vitesses.* — Supposons qu'une droite Oy se meuve parallèlement à elle-même, en sorte que tous ses points décrivent d'un mouvement uniforme des droites égales et parallèles, et soit Ox la direction de ce mouvement de translation. Supposons qu'en même temps un mobile, parti du point O, se meuve le long de la droite Oy avec une vitesse constante (*fig.* 114). On pourra regarder ce mobile comme animé à la fois de deux mouvements rectilignes et uniformes, savoir : son mouvement propre sur Oy, et le mouvement de translation de cette droite dans le sens Ox. Mais, de fait, le mobile décrit dans l'espace une ligne unique avec une certaine vitesse, et ce mouvement réel prend le nom de *mouvement résultant*. A l'égard de ce dernier, les deux autres s'appellent *mouvements composants*.

On aura une représentation vulgaire, mais exacte, de ces mouvements simultanés, en imaginant qu'un bateau descende uniformément le cours d'une rivière, et qu'une

personne marche en même temps sur le pont, suivant une certaine direction, et avec une vitesse constante.

Fig. 114.



Proposons-nous de déterminer la direction et la vitesse du mouvement résultant. Soit B la position que le mobile occuperait sur Oy, au bout du temps t, si le mouvement suivant Ox n'existait pas. Pendant ce temps, la droite Oy s'est transportée en AF. Donc, si l'on prend sur cette droite une longueur $AD = OB$, D sera la position réelle du mobile, à l'époque considérée. On voit que ce point est le sommet du parallélogramme construit sur OA et OB. Je dis de plus que, pendant le temps t, le mobile n'a pas cessé d'être sur la diagonale OD, et qu'il l'a décrite d'un mouvement uniforme. En effet, soient p et q les vitesses des mouvements composants, suivant Ox et Oy; on a

$$OA = pt, \quad OB = qt,$$

d'où

$$\frac{OB}{OA} \text{ ou } \frac{AD}{OA} = \frac{q}{p},$$

quantité indépendante du temps.

Par conséquent, si l'on considère une autre position D′ du mobile, correspondante au temps t', on aura

$$\frac{A'D'}{OA'} = \frac{AD}{OA}.$$

Donc les deux triangles OAD, OA′D′ sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; par suite, la direction OD′ coïncide avec OD.

Enfin, comme on tire de la similitude des mêmes

triangles

$$\frac{OD}{OD'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{qt}{qt'} = \frac{t}{t'},$$

on voit que les espaces parcourus sur la diagonale sont proportionnels aux temps. Le mouvement rectiligne résultant est donc uniforme.

Si l'on fait $t = 1$, OA et OB seront les vitesses des deux mouvements composants, et la diagonale OD représentera la vitesse du mouvement résultant.

Donc, *deux mouvements simultanés, rectilignes et uniformes se composent en un seul, rectiligne et uniforme; et la vitesse du mouvement résultant est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent les vitesses des mouvements composants.*

Ce théorème porte le nom de *parallélogramme des vitesses*. Son analogie avec le parallélogramme des forces est évidente.

138. *Autre énoncé du même théorème.* — En faisant intervenir les *projections du mobile sur deux axes fixes*, on donne au théorème précédent un énoncé qu'il est utile de connaître.

A et B sont les projections du point D sur les deux *axes* fixes Ox, Oy, projections faites sur chaque axe par une droite parallèle à l'autre; elles ne sont orthogonales qu'autant que les axes sont rectangulaires. Or, chacune de ces projections peut être considérée comme animée d'un mouvement uniforme sur l'axe qui lui correspond.

Donc, *si un point se meut dans le plan de deux axes fixes, et que ses projections sur les deux axes aient des mouvements uniformes, ce point a lui-même un mouvement rectiligne et uniforme, dont la vitesse est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses de ses projections.*

139. *Réciproque.* — Connaissant le mouvement rectiligne et uniforme d'un point, on peut se proposer de déterminer les vitesses des projections du mobile sur deux axes fixes, compris dans un même plan avec la direction du mouvement donné.

Soient (*fig.* 114) O la position du mobile à l'époque où l'on commence à compter le temps, OD la direction du mouvement, v la vitesse; Ox, Oy les deux axes de projection que l'on peut toujours supposer menés par le point O; A la projection du mobile sur Ox au bout du temps t, A′ sa projection au bout du temps t'; on aura d'abord

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OD}{OD'} = \frac{vt}{vt'} = \frac{t}{t'},$$

ce qui prouve que le mouvement de la projection A est uniforme; puis, en désignant par p la vitesse de cette projection, on aura

$$\frac{p}{v} = \frac{OA}{OD}.$$

Donc, si la diagonale du parallélogramme OADB représente la vitesse du mouvement donné, chaque côté représentera la vitesse de la projection correspondante, etc.

Il serait superflu d'insister sur les autres corollaires relatifs au parallélogramme des vitesses; nous n'aurions qu'à reproduire tout ce qui a été exposé dans la deuxième Leçon, en substituant le mot *vitesse* au mot *force*.

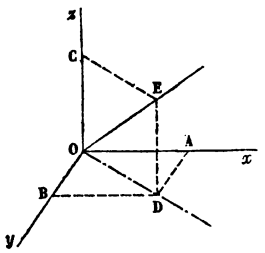
140. *Composition d'un nombre quelconque de mouvements simultanés rectilignes et uniformes. — Parallélipipède des vitesses. — Projections du mobile sur trois axes fixes.* — Du cas de deux mouvements simultanés, rectilignes et uniformes, on passe sans difficulté à celui d'un nombre quelconque de mouvements de même espèce, en les composant de deux en deux.

On réaliserait en particulier l'hypothèse de trois mouvements composants, si l'on soulevait verticalement un poids

avec la main, tandis qu'on marcherait sur le pont d'un bateau descendant le cours d'une rivière. Le mouvement *résultant*, c'est-à-dire le mouvement réel du poids, participerait évidemment des trois mouvements simultanés rectilignes. La composition de ces mouvements conduit au *parallélipipède des vitesses*.

Soient Ox, Oy, Oz les directions de trois mouvements composants (*fig.* 115); OA, OB, OC leurs vitesses; O la position initiale du mobile.

Fig. 115.



Si l'on conçoit un point qui ne participe qu'aux deux premiers mouvements, c'est-à-dire dont les projections sur Ox et Oy se meuvent avec les vitesses constantes OA et OB, celui-ci décrira (137) la diagonale OD avec une vitesse constante, représentée par la longueur même de cette diagonale. Or ce mobile fictif est, à chaque instant, la projection sur le plan xOy du mobile réel; car la ligne indéfinie OD est le lieu géométrique de tous les points de ce plan, dont les projections sur les axes Ox et Oy se meuvent avec des vitesses proportionnelles à OA et OB. Donc la question est réduite à composer, dans le plan DOz, deux mouvements rectilignes et uniformes, dont les vitesses sont OD et OC. C'est exactement la construction du parallélipipède des forces. De ce qui précède résulte la proposition suivante, qui comprend celle du numéro précédent.

Si l'on projette un mobile sur trois axes fixes menés

comme on voudra dans l'espace (*), *et que les mouvements de ces trois projections soient uniformes,* 1° *le mobile aura dans l'espace un mouvement rectiligne et uniforme;* 2° *il existera entre la vitesse du mobile et les vitesses de ses projections les mêmes relations qu'entre une force et ses trois composantes.*

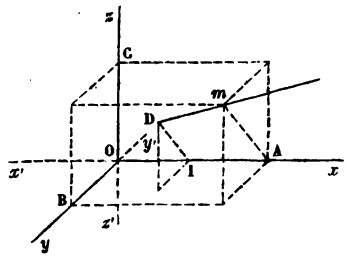
C'est ce qui a fait donner aux vitesses des projections, bien que purement fictives, le nom de *composantes* de la vitesse du mobile.

Réciproquement, quand un point est animé dans l'espace d'un mouvement rectiligne et uniforme, sa vitesse peut être considérée comme la *résultante* de trois autres vitesses constantes, qui sont celles des projections du mobile sur trois axes fixes, et qui se déduisent de la première par la règle du parallélipipède des forces.

141. *Équations du mouvement rectiligne et uniforme d'un point projeté sur trois axes fixes.*

Quand on veut déterminer le mouvement rectiligne ou curviligne d'un point dans l'espace, le moyen généralement employé consiste à rapporter sa position à trois axes fixes. Soient Ox, Oy, Oz ces axes, ordinairement rectangulaires deux à deux, mais que nous supposons tracés arbitrairement dans l'espace (*fig.* 116);

Fig. 116.



A, B, C les projections orthogonales ou obliques du mobile *m* sur ces axes.

(*) Projections orthogonales, ou obliques, toujours faites sur chaque axe par des droites parallèles au plan des deux autres axes.

Si les trois points A, B, C sont connus à chaque instant, il en sera de même de la position du mobile m, puisqu'il occupera le sommet du parallélipipède variable OABCm. Les arêtes OA, OB, OC se nomment les *coordonnées* du point m; on les désigne respectivement par les lettres x, y, z, et on les considère comme positives ou négatives selon qu'elles tombent sur les parties Ox, Oy, Oz des axes, ou sur leurs prolongements Ox', Oy', Oz'.

Quand le point m décrit sa trajectoire, droite ou courbe, chacune des coordonnées x, y, z varie d'une manière continue avec le temps. Nous allons déterminer ces fonctions du temps, dans le cas du mouvement rectiligne et uniforme.

Soient D la position du mobile à l'origine du temps, et x_0, y_0, z_0 ses coordonnées; $m\,(x, y, z)$ sa position au bout du temps t. $x - x_0$ sera l'espace IA décrit, durant le temps t, par la projection du mobile sur l'axe Ox. Or, cet espace est aussi exprimé par le produit pt, p désignant la vitesse constante positive ou négative de la projection. On a donc

$$x = x_0 + pt;$$

de même, en désignant par q et r les vitesses des projections sur les deux autres axes, on a

$$y = y_0 + qt,$$
$$z = z_0 + rt.$$

Telles sont les trois équations du mouvement rectiligne et uniforme.

Quand les coordonnées sont rectangulaires, on a (25)

$$p = v\cos\alpha, \quad q = v\cos\beta, \quad r = v\cos\gamma,$$

v désignant la vitesse du mobile dans l'espace, et α, β, γ les angles que sa direction fait avec les parties positives des axes. Les équations du mouvement prennent alors la forme

$$x = x_0 + v\cos\alpha . t,$$
$$y = y_0 + v\cos\beta . t,$$
$$z = z_0 + v\cos\gamma . t.$$

L'élimination de t entre ces trois équations donne

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma};$$

ces deux dernières déterminent les projections de la trajectoire rectiligne sur les plans xOy, xOz, yOz.

142. *Composition de deux mouvements simultanés, rectilignes et uniformément variés. — Accélération du mouvement résultant. — Parallélogramme des accélérations.* — Il est aisé de reconnaître, par un raisonnement tout semblable à celui qui a été fait plus haut, que *le mouvement résultant de deux mouvements simultanés, rectilignes et uniformément variés, est également rectiligne et uniformément varié, et que son accélération est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent en grandeur et en direction les accélérations composantes.* Reprenons en effet la *fig.* 114, dans laquelle nous supposerons que A et B désignent les positions qu'aurait au bout du temps t le mobile partant du repos, si chacun des mouvements composants existait seul. En désignant par φ et ψ les accélérations de ces mouvements, on aura

$$OA=\frac{1}{2}\varphi t^2,\quad OB=\frac{1}{2}\psi t^2.$$

Au bout du temps t, le mobile occupera le sommet D du parallélogramme AOBD; et depuis l'origine du mouvement, il n'aura pas quitté la diagonale OD, puisque le rapport $\frac{AD}{OA}=\frac{\psi}{\varphi}$ est indépendant du temps. De plus, comme on a

$$\frac{OD}{OD'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{t^2}{t'^2},$$

le mouvement résultant sera uniformément varié.

Enfin, les accélérations des trois mouvements,

$$\frac{2OA}{t^2}, \quad \frac{2OB}{t^2}, \quad \frac{2OD}{t^2},$$

sont proportionnelles aux longueurs OA, OB, OD. Par conséquent, si l'on représente les accélérations composantes par les côtés OA, OB du parallélogramme, l'accélération résultante sera représentée par la diagonale OD.

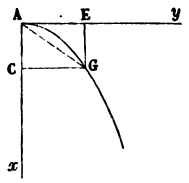
C. Q. F. D.

Enfin, de deux mouvements uniformément variés on passera à trois, et à un nombre quelconque, comme on l'a vu plus haut pour les vitesses.

143. *Composition de deux mouvements simultanés rectilignes, l'un uniforme, l'autre uniformément varié.* — Ici le mouvement résultant n'est plus *rectiligne* et suit une loi moins simple. On a l'image d'un semblable mouvement en supposant qu'un corps soit assujetti à descendre, d'un mouvement uniformément accéléré, le long du mât d'un navire, tandis que le bâtiment a un mouvement de translation uniforme (*).

Soient Ax la direction du mouvement composant uniformément varié; Ay celle du mouvement uniforme (*fig.* 117);

Fig. 117.



φ l'accélération du premier, a la vitesse du second; C et E

(*) L'expérience montre qu'il n'est pas besoin pour cela d'*assujettir* le corps à descendre le long du mât. Il suffit qu'on le laisse tomber en chute libre. Ce fait est compris dans la loi générale du *mouvement relatif* qui sera exposée plus loin (148).

les positions qu'aurait le mobile partant du point A, au bout du temps t, si chacun des mouvements composants existait seul,

$$AC = \frac{1}{2}\varphi t^2, \quad AE = at.$$

Il est clair que la position réelle du mobile au bout du temps t sera le sommet G du parallélogramme ACGE. Mais le rapport $\frac{EG}{AE}$, ou $\frac{1}{2}\frac{\varphi}{a}t$, n'est plus constant; en sorte que la direction de la droite AG, qui joint le point de départ à une position quelconque du mobile, change à chaque instant. La ligne qu'il parcourt, ou sa *trajectoire*, est donc *curviligne*.

Désignons AC par x et AE ou son égale CG par y, et éliminons le temps t entre les expressions de ces deux variables, il viendra

$$y^2 = \frac{2a^2}{\varphi}x.$$

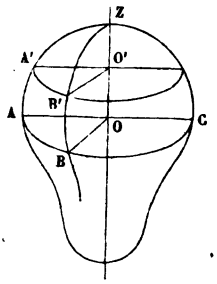
Cette équation permettra de construire par points la trajectoire, en la rapportant aux deux axes Ax, Ay. C'est pourquoi on l'appelle *l'équation de la trajectoire*. Elle montre que le carré de l'ordonnée perpendiculaire à l'axe Ax est proportionnel à la distance du pied de cette ordonnée à l'origine A, propriété caractéristique de la *parabole*.

Nous reviendrons sur les circonstances principales de ce mouvement, après que nous aurons étudié l'action des forces.

144. *Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. — Vitesse angulaire.* — Le mouvement curviligne le plus simple est le mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Déjà nous l'avons défini dans le treuil.

Chaque point A du corps qui tourne (*fig.* 118) décrit un cercle ABC perpendiculaire à l'axe, et qui a son centre O

Fig. 118.



sur cette droite. Comme le corps est supposé invariable de figure, les arcs AB, A'B',..., décrits dans le même temps par différents points, répondent à des angles au centre AOB, A'O'B', égaux entre eux. On a donc

$$\frac{AB}{AO} = \frac{A'B'}{A'O'} = \dots$$

Si l'on désigne la valeur commune de ces rapports par ω, ω sera l'arc décrit par un point situé à l'unité de distance de l'axe; et pour un point quelconque A situé à la distance R, on aura

$$AB = R\omega.$$

Le mouvement de rotation est dit *uniforme* quand les arcs décrits par un même point du corps, pendant des intervalles de temps égaux, sont égaux, quelque petits que soient ces intervalles. On appelle *vitesse angulaire* l'arc ω décrit dans l'unité de temps par un point situé à l'unité de distance de l'axe. Il ne faut pas confondre la vitesse angulaire avec la *vitesse absolue* d'un point quelconque. Cette dernière est égale, d'après ce qui précède, à la vitesse angulaire multipliée par la distance du point à l'axe de rota-

tion. Les vitesses absolues de deux points sont proportionnelles à leurs distances à l'axe.

La vitesse angulaire s'exprime souvent par le nombre de degrés, minutes et secondes de l'arc ω. Si n est ce nombre, on en conclut

$$\omega = \frac{2\pi . n}{360}.$$

Par exemple, la Terre tourne avec une vitesse angulaire de 15 degrés par heure, ou, si l'on veut prendre la seconde pour unité de temps, avec une vitesse de 15 secondes par seconde de temps. La valeur correspondante de ω est

$$\frac{2\pi . 15}{360 . 60 . 60} = \frac{\pi}{43200}.$$

Quand il s'agit d'un mouvement de rotation rapide, comme celui d'un grand nombre de machines, la vitesse angulaire se mesure par le nombre de tours effectués dans un temps donné. Il est du reste bien facile de passer de ce nombre à la valeur de ω. Ainsi, supposons que l'arbre d'une roue fasse 15 tours par seconde, on en conclut

$$\omega = 2\pi . 15.$$

Quand le rapport de l'arc décrit par l'un des points du corps, au temps employé à le décrire, change continuellement, le mouvement de rotation est dit *varié*. Nous pourrions étendre à ce mouvement circulaire tout ce qui a été dit plus haut de la vitesse et de l'accélération ; mais ces développements ne seraient pas à leur place dans un Cours élémentaire.

DIX-SEPTIÈME ET DIX-HUITIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Loi de l'inertie. — Loi du mouvement relatif (*). — On en déduit qu'une force constante, agissant sur un point matériel qui part du repos ou qui est animé d'une vitesse initiale de même direction que la force, lui imprime un mouvement uniformément varié. — Réciproque. — Deux forces constantes sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent en agissant séparément sur un même point matériel, qui part du repos ou qui est animé d'une vitesse initiale de même direction que la force. — De la masse. — Sa mesure au moyen du poids.

145. *Loi de l'inertie.* — Nous avons posé, au début de la Statique, comme fait expérimental, qu'un corps en repos ne peut *se mettre de lui-même en mouvement.* Nous ajouterons maintenant qu'il ne peut *de lui-même modifier le mouvement qui lui a été communiqué.* Ces deux résultats de l'expérience constituent la *loi de l'inertie.* Pour vérifier notre dernière assertion, observons ce qui se passe lorsque les forces qui font mouvoir un corps cessent tout à coup d'agir sur lui : nous voyons qu'à mesure que les causes retardatrices, telles que la force de frottement, la résistance du milieu, etc., sont atténuées, le mouvement se continue de plus en plus et tend à conserver une direction et une vitesse constantes.

D'après ces faits, l'induction nous conduit à formuler cette proposition générale, qui exprime, sous une forme précise, la loi de l'inertie :

Si un point matériel est en repos, il restera dans cet état tant qu'aucune force n'agira sur lui : s'il est en mouvement, sans être actuellement sollicité par aucune force, ce mouvement sera rectiligne et uniforme.

Ceci ne veut pas dire que la matière n'intervient pas

(*) On admet ces deux lois comme résultats de l'expérience.

dans la production du mouvement. C'est le contraire qui est vrai : il résulte en effet de la loi de l'attraction universelle que les points matériels de tous les corps s'attirent mutuellement. Mais chaque point matériel agit sur les *autres* et non pas sur lui-même.

146. *Il n'existe pas de force dont l'effet soit instantané.* — L'effet d'une force sur un point matériel exige toujours un *temps fini* pour se produire. Il n'y a pas de force dans la nature, quelque grande qu'elle soit, qui puisse imprimer *instantanément* une vitesse finie à un mobile. Les forces que l'on appelle improprement *instantanées*, comme celles qui agissent dans les chocs ou percussions, ne diffèrent des forces ordinaires qu'en ce qu'elles produisent des changements considérables de vitesse, pendant des intervalles assez courts pour que les déplacements de leurs points d'application soient négligeables. Mais l'action de ces forces a toujours une certaine durée, pendant laquelle on doit la considérer comme variant d'une manière continue.

147. *Nouveau point de vue sous lequel on peut considérer la vitesse dans le mouvement rectiligne varié.* — Il résulte de ce qui précède que, dans le mouvement rectiligne varié, il y a nécessairement une force qui sollicite le mobile. C'est à son action continue qu'est due la variation de vitesse; et cette variation ne peut être qu'infiniment petite dans un intervalle de temps infiniment petit. Nous sommes ainsi conduits à envisager la vitesse acquise au bout du temps t sous un nouveau point de vue.

Soient m la position du mobile au bout du temps t, x sa distance à un point fixe O pris sur la droite qu'il décrit; x' sa distance Om' au bout du temps $t+h$. (x est une fonction continue du temps qui devient x' quand la variable t reçoit l'accroissement h.) Soient v la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié, si, à l'é-

poque t, la force venait à cesser d'agir; v' la vitesse du mouvement uniforme qui aurait lieu, si la force ne cessait d'agir qu'au bout du temps $t+h$. Comme l'intervalle h est aussi petit que l'on veut, on peut regarder la vitesse comme constamment croissante ou constamment décroissante durant cet intervalle : supposons-la croissante. L'espace mm', réellement décrit, sera évidemment plus grand que celui qui serait décrit dans le même temps, d'un mouvement uniforme, avec la vitesse v, et moindre au contraire que celui qui serait décrit en vertu de la vitesse v'; on aura donc

$$vh < x' - x < v'h,$$

d'où

$$v < \frac{x'-x}{h} < v';$$

si l'on fait tendre h vers zéro, v' se confond avec v; et le rapport $\frac{x'-x}{h}$, qui n'a pas cessé d'être compris entre v et v', se confond à la limite avec v. Donc

$$v = \lim \frac{x'-x}{h}.$$

Mais $\lim \frac{x'-x}{h}$ est précisément la vitesse $d_t x$ déjà définie (127).

Ainsi il est indifférent de dire, ou que *la vitesse à un instant quelconque est la dérivée de l'espace considéré comme fonction du temps,* ou bien qu'elle *est la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié, si la force cessait d'agir à l'instant considéré.*

Ce qui distingue le second point de vue du premier, c'est qu'il fait intervenir *la cause* du mouvement. Dans le premier nous n'avions égard qu'à l'*effet* produit.

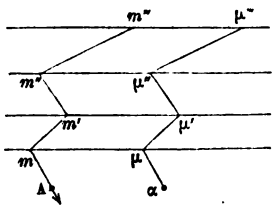
En Physique, lorsqu'on veut vérifier la loi des vitesses des corps pesants, par la machine d'Atwood, on sait que

l'action de la pesanteur est suspendue à l'aide d'un curseur évidé qui arrête le poids additionnel auquel est due l'accélération du mouvement. Celui-ci devient alors uniforme, et c'est sa vitesse qu'on observe. Dans cette expérience, la vitesse est donc considérée sous le second point de vue, dont l'accord avec l'autre vient d'être mis en évidence.

148. *Loi du mouvement relatif.* — Il s'agit maintenant de déterminer la relation qui existe entre la variation de la vitesse et l'intensité de la force qui la produit. Cette relation se déduit d'une loi générale, qu'il n'est pas possible d'établir à l'aide du seul raisonnement. Nous la présenterons comme un résultat de l'expérience, confirmée par l'accord qui existe entre ses nombreuses conséquences et les phénomènes observés. Cette loi, dite *du mouvement relatif,* s'énonce ainsi :

Si un système de points matériels libres m, m', m'',... (fig. 119) se meut suivant des droites parallèles, avec des vitesses quelconques, constantes ou variables, mais les

Fig. 119.



mêmes à chaque instant pour tous les points, et que l'un d'eux m vienne à être sollicité par une certaine force (autre que celles qui produisent le mouvement commun), *son mouvement relatif sera le même que si le mouvement commun n'existait pas.*

Ainsi, soit $m\mathrm{A}$ l'espace que la force ferait parcourir au point m partant du repos, si elle agissait *seule* sur lui, dans

la même direction, pendant un intervalle de temps h; ce point va s'écarter de la figure mobile $mm'm''$; et son écart, ou *mouvement relatif,* au bout du temps h, sera précisément égal et parallèle à mA. En sorte que, si la figure s'est transportée pendant ce temps en $\mu\mu'\mu''\ldots$, la position réelle du point m s'obtiendra en menant $\mu\alpha$ égale et parallèle à mA. Le mobile occupera donc le sommet α du parallélogramme ayant pour côtés les espaces mA, $m\mu$ qui seraient décrits simultanément, l'un en vertu de la force particulière, l'autre en vertu du mouvement *commun.*

Si le point m était soumis à l'action simultanée de plusieurs forces particulières, on les composerait d'abord en une seule (21), et c'est à l'effet produit par cette résultante unique que s'appliquerait la loi du mouvement relatif.

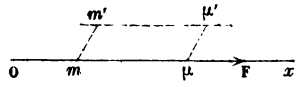
Quand il arrivera que ce groupe de forces soit séparément en équilibre sur le point m pris à l'état de repos, l'introduction de ce groupe ne fera pas sortir le point m du mouvement commun, et n'apportera aucune modification à ce mouvement.

149. *Extension de la notion d'équilibre.* — Il suit de là que l'idée d'équilibre n'implique pas nécessairement l'état de repos du mobile. Si plusieurs forces s'entre-détruisent sur un point en repos, elles se détruiront encore en agissant sur le même point à l'état de mouvement, c'est-à-dire qu'elles ne modifieront en rien le mouvement qui lui aura été communiqué par d'autres forces.

150. *Lorsqu'une force agit sur un point matériel déjà animé d'une vitesse de même direction que la force, la vitesse au bout d'un temps quelconque est la somme* (algébrique) *de la vitesse initiale et de celle que la force est capable d'imprimer dans le même temps au mobile partant du repos.* — Considérons une force F agissant dans

la direction Ox (*fig.* 120) sur un point m, déjà animé d'une vitesse v_0 de même direction que la force. Il résulte

Fig. 120.



de la loi précédente que l'accroissement de vitesse qui aura lieu au bout d'un temps quelconque sera indépendant de la vitesse initiale. En effet, pour revenir à un *système* de points matériels, imaginons un ou plusieurs points, tels que m', qui décrivent des droites parallèles à Ox avec la vitesse constante v_0. Si la force F n'existait pas, le système $(m, m', \ldots)$ décrirait d'un mouvement commun, pendant le temps t, l'espace

$$m\mu = m'\mu' = v_0 t.$$

Mais la force intervenant, et agissant sur *m seul*, il résulte de la loi du mouvement relatif que la position vraie de ce point, au bout du temps t, s'obtiendra en portant, à partir de μ, une longueur égale à l'espace que cette force ferait parcourir au même point pendant le temps t, s'il partait du repos.

Désignons cet espace par y (*) : la distance du mobile m au point fixe O pris sur la droite qu'il décrit sera, au bout du temps t,

$$x = x_0 + v_0 t + y,$$

x_0 désignant la distance Om, qui répond à $t = 0$. D'où, en prenant les dérivées des deux membres, on tire

$$v = v_0 + d_t y.$$

(*) On doit considérer y comme une fonction de t positive ou négative, selon que la force F agit dans le sens μx, qui est celui de la vitesse initiale v_0, ou dans le sens contraire.

Or $d_t y$ exprime (127) la vitesse que la force F imprimerait au point m pendant le temps t, si elle agissait seule sur ce mobile partant du repos.

La proposition est donc démontrée. En d'autres termes, *l'effet de la force est indépendant du mouvement antérieurement acquis.*

151. *Mouvement produit par une force constante.* — Supposons que la force à laquelle le point matériel est soumis soit *constante*, c'est-à-dire identique à elle-même en intensité comme en direction. Soit a la vitesse constante qu'elle est capable d'imprimer, dans l'unité de temps, à ce point matériel partant du repos. Si v_0 est la vitesse initiale du même point, il résulte de ce qui précède que $v_0 + a$ sera sa vitesse au bout de la première unité de temps. De même, la force continuant d'agir, $(v_0 + a) + a$ ou $v_0 + 2a$ sera la vitesse du mobile à la fin de la deuxième unité de temps, et ainsi de suite; $v_0 + at$ sera la vitesse au bout de t unités de temps. a doit être considérée comme positive ou négative, selon que la force agit dans le sens de la vitesse initiale ou en sens contraire. *Le mouvement produit par une force constante, agissant dans la direction de la vitesse initiale, est donc uniformément varié.* L'accélération a de ce mouvement est la vitesse que la force est capable d'imprimer pendant l'unité de temps au même point matériel partant du repos. Quant à l'espace x parcouru au bout du temps t, il est exprimé (131) par l'équation

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Réciproquement : Si le mouvement rectiligne d'un point matériel est uniformément varié, la force qui le sollicite est constante. D'abord, il est clair qu'elle a une *direction* constante qui est celle du mouvement lui-même : car si, à un instant quelconque, sa direction différait de celle du

mouvement, il résulte de la loi du mouvement relatif que le mobile sortirait de la ligne qu'il a suivie jusque-là. De plus, son *intensité* est constante : car les variations de vitesse qu'elle produit en temps égaux sont égales, et l'on sait qu'elles sont indépendantes de la vitesse acquise. Donc la force est sans cesse identique à elle-même.

Il résulte de là qu'un mouvement rectiligne, qui n'est ni uniforme ni uniformément varié, ne peut être produit que par une force d'intensité variable.

152. *La pesanteur est une force constante.* — Quand un corps est abandonné librement, dans le vide, à l'action de la pesanteur, on sait (133) que tous ses points décrivent des droites parallèles, d'un mouvement uniformément accéléré; et que l'accélération de ce mouvement est indépendante de la substance dont le corps est formé. Donc la pesanteur est une force constante, qui agit de la même manière sur tous les corps.

A la vérité, nous voyons les différents corps tomber *dans l'air* avec des vitesses inégales. Mais cela tient non à l'inégalité d'action de la pesanteur, mais à la résistance du milieu, qui varie avec la surface du mobile.

Remarque. — Les points matériels d'un corps qui tombe dans le vide sont dans les mêmes conditions que s'ils n'étaient pas liés entre eux, mais seulement juxtaposés et sollicités par des forces parallèles, constantes et capables de leur imprimer la même vitesse dans le même temps. La résultante de toutes ces forces en nombre infini est égale à leur somme, appliquée au centre de gravité du mobile, et constitue ce que nous avons appelé son *poids*. L'expérience, d'accord avec la théorie qui précède, montre que le poids d'un mobile est le même à l'état de mouvement qu'à l'état de repos. En effet, que l'on suspende un poids au crochet d'un dynamomètre, et que le système soit entraîné d'un mouvement vertical uniforme, comme dans la machine

d'Atwood, on verra la flexion du ressort se maintenir constamment la même que dans l'état de repos de l'appareil.

153. *Proportionnalité des forces constantes aux accélérations.* — Considérons d'abord deux forces constantes f, f', capables d'imprimer *séparément* à un même point matériel m des accélérations a, a'. Si l'on fait agir ces deux forces *simultanément* et dans le même sens, il résulte du principe du mouvement relatif que l'accélération du mouvement produit par la résultante $(f+f')$ sera $(a+a')$. Car, en associant par la pensée au point m un ou plusieurs points matériels μ, μ' animés de la même vitesse initiale v_0, mais soumis seulement à l'action de la force f, on verra, d'une part, que l'espace décrit d'un *mouvement commun* et uniformément accéléré par le système $(m, \mu, \mu', \ldots)$ sera, au bout du temps t,

$$v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 ;$$

d'autre part, que le *mouvement relatif* de m, ou son *écart* du système μ, μ', sera

$$\frac{1}{2} a' t^2 ;$$

par conséquent, que l'espace total parcouru par le mobile m dans le même temps sera

$$v_0 t + \frac{1}{2} (a + a') t^2 ,$$

et par suite sa vitesse

$$v_0 + (a + a') t .$$

L'accroissement *constant* de vitesse dans l'unité de temps est donc $a + a'$.

Maintenant, si l'on suppose $f' = f$, et, par suite, $a' = a$, on voit qu'une force $2f$ produira une accélération $2a$. Le même raisonnement s'appliquant à un nombre quelconque de forces égales, on conclut déjà qu'une force nf produira une accélération na.

Cela posé, soient F et F′ deux forces constantes quelconques, φ et φ′ les accélérations qu'elles sont capables de produire en agissant séparément sur un même point matériel ; f une force aussi petite qu'on voudra, commune mesure entre F et F′, en sorte que l'on ait

$$F = nf, \quad F' = n'f,$$

n, n' étant des nombres entiers ; enfin soit a l'accélération que produirait la force f agissant sur le même mobile. D'après ce qui précède, on aura

$$\varphi = na, \quad \varphi' = n'a,$$

d'où

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{n}{n'}.$$

Or

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'},$$

donc

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varphi}{\varphi'}.$$

Ce raisonnement subsiste quelque petite que soit la commune mesure f ; nous pouvons donc formuler cette proposition générale :

Deux forces constantes sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent, en agissant séparément sur un même point matériel partant du repos ou animé d'une vitesse initiale de même direction que la force.

154. *Cas où l'une des forces est le poids même du point matériel.* — Si plusieurs forces constantes F, F′, F″,..., agissant séparément sur un même point matériel, lui impriment les accélérations φ, φ′, φ″,..., on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{F'}{\varphi'} = \frac{F''}{\varphi''}.$$

Le rapport $\frac{F}{\varphi}$ est donc constant pour un point matériel

donné. En particulier, si l'une des forces est le poids p du mobile, l'accélération correspondante sera (133) la quantité $g = 9^{m},8088$, et l'on aura

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{p}{g},$$

d'où

$$F = \varphi \cdot \frac{p}{g}.$$

Ainsi, *l'intensité de la force constante qui, agissant seule sur un point matériel, est capable de lui imprimer une accélération donnée, est égale au produit de cette accélération par le rapport du poids du mobile au nombre* $g = 9,8088$.

155. *De la masse. — Sa mesure au moyen du poids. — Unité de masse.* — L'expérience usuelle apprend qu'un même effort appliqué à des corps de même matière, mais de volumes différents, ne leur communique pas le même mouvement : plus le volume est grand, toutes choses égales d'ailleurs, plus la force qu'il faut appliquer au mobile pour lui imprimer un certain mouvement est grande.

On observe de plus que si les corps ne sont pas de même matière, celui qui a le plus grand volume n'est pas toujours celui qui exige le plus grand effort : ainsi la différence d'effet ne dépend pas seulement du volume.

On dit vulgairement qu'un corps a une *masse* plus ou moins grande, selon qu'il faut un effort plus ou moins grand pour lui communiquer un mouvement déterminé. Mais cette notion a besoin d'être précisée pour être introduite en Mécanique. A cet effet, définissons l'*égalité de masse* et la *somme de deux masses*.

Nous dirons que *deux points matériels ont des masses égales, lorsque deux forces égales appliquées à ces deux points pris à l'état de repos, pendant le même temps, leur impriment le même mouvement*. Cette définition ne sup-

pose nullement que les deux points appartiennent à des corps formés de la même substance matérielle.

Si on lie ensemble, invariablement, deux, trois, quatre,..., points matériels de masses égales, on formera de nouveaux points matériels dont les masses seront dites *doubles, triples,... quadruples,* de celle de l'un des premiers. Ainsi l'on conçoit deux points matériels dont les masses aient entre elles un rapport numérique quelconque.

Nous avons déjà dit qu'un corps solide de dimensions finies est l'assemblage d'un nombre infini de points matériels liés invariablement entre eux. En général, quand un corps sera formé de deux autres liés ensemble, sa masse sera dite la *somme des masses* des deux autres.

Maintenant remarquons : 1° qu'il résulte de la relation

$$F = \varphi \frac{p}{g},$$

que, tant que le rapport $\frac{p}{g}$ ne change pas, la force F, capable d'imprimer au point matériel l'accélération φ, ne change pas non plus, et qu'elle varie au contraire proportionnellement à ce rapport; 2° que si plusieurs points matériels de poids p, p', p'' viennent à être liés ensemble pour former un nouveau point matériel de poids P, le rapport $\frac{P}{p}$ qui lui correspond est la somme $\frac{p+p'+p''\cdots}{g}$ des rapports qui correspondent aux premiers points.

Ces considérations conduisent à prendre, pour mesure de la masse d'un point matériel, le rapport $\frac{p}{g}$: le sens du mot *masse* en Mécanique sera nettement fixé, sans s'écarter de l'acception vulgaire. Ainsi *la masse d'un point matériel sera mesurée par le rapport de son poids au nombre g qui représente l'accélération de la pesanteur.*

Et comme les poids de tous les points matériels dont se

compose un corps de dimensions finies s'ajoutent pour former le poids du corps, *la masse d'un corps quelconque sera mesurée par le rapport de son poids au nombre g*.

D'un lieu du globe à un autre, p et g varient pour un même point matériel; mais leur rapport, ou la masse du point, reste invariable.

D'après cette définition, et vu le choix déjà fait du kilogramme pour unité de poids, l'*unité de masse* sera la masse d'un corps dont le poids est égal à g kilogrammes, c'est-à-dire $9^{kil},8088$ (à l'Observatoire de Paris). On peut dire encore que cette masse est celle de 9,8088 décimètres cubes d'eau distillée, prise au maximum de densité.

Remarquons que ce nombre g représente, suivant qu'il est rapporté au mètre ou au kilogramme, l'accélération due à la pesanteur, ou le poids de l'unité de masse. Il sert de mesure à l'intensité de la pesanteur en chaque lieu.

Dans le même lieu, *les masses de deux corps sont proportionnelles à leurs poids*.

Ce qui distingue en Mécanique les corps *homogènes* des corps *hétérogènes*, c'est que, dans les premiers, des volumes égaux renferment des nombres égaux de points matériels, également pesants ou ayant des masses égales; tandis que, dans les seconds, les points matériels, toujours également pesants, ne sont plus répartis en même nombre sous le même volume.

Remarque. — La division de la masse d'un corps en une infinité de points matériels infiniment petits suppose qu'il est formé d'une matière continue, ce qui n'a pas lieu dans la nature : les corps naturels sont en effet composés de molécules matérielles *disjointes*, et séparées les unes des autres par des intervalles vides de matière pondérable. Il semble donc qu'il y ait ici contradiction. Mais il faut remarquer que ces molécules échappent par leur extrême petitesse à tous nos moyens d'observation; en sorte que rien n'empêche de concevoir les corps de la nature comme divisés

en parties matérielles de grandeur *finie*, qui renferment des nombres immenses de molécules, et qui n'aient encore que des dimensions insensibles. Ce sont ces dernières parties matérielles que l'on regardera comme répandues dans la totalité du volume, et qu'on traitera dès lors comme des *éléments de masse* infiniment petits. Nous n'approfondirons pas davantage cette difficulté, qui exigerait, pour être complétement levée, des développements empruntés au calcul intégral.

156. *Cas d'un mobile de dimensions finies, dont tous les points décrivent des droites parallèles.* — Jusqu'à présent, il ne s'agit que d'un point matériel. Mais les conclusions précédentes s'étendent à un corps de dimensions finies, dont tous les points décrivent des droites parallèles avec des vitesses égales. En effet, considérons des points matériels libres, de masses égales, et tous sollicités par des forces constantes, égales et parallèles. Ces points prendront un mouvement commun, uniformément varié; et, pour chacun d'eux, l'équation $F = \varphi \frac{p}{g}$ sera satisfaite. Puisque ces points conservent constamment les mêmes positions relatives, il est clair que leur mouvement commun ne changera pas s'ils viennent à être liés entre eux d'une manière invariable. Mais alors on pourra regarder ce *corps solide* comme sollicité par une force unique, résultante de toutes les forces élémentaires. Cette résultante sera égale à leur somme et appliquée au centre de gravité du corps. Si on la désigne par R, et par P la somme des poids p de tous les points matériels ou le poids même du corps, on aura

$$R = \varphi \frac{P}{g}.$$

Réciproquement, si un corps de figure invariable est sollicité par une force unique, constante et appliquée à son centre de gravité, tous ses points décriront, d'un mouvement uniformément varié, des droites égales et parallèles

à la direction de la force. En effet, on peut concevoir le corps comme partagé en une infinité de points matériels, de masses égales, auxquels seraient appliquées des forces égales et parallèles, ayant pour somme la force appliquée au centre de gravité. L'accélération φ de ce mouvement sera liée à la force et au poids par la relation précédente.

Comme application, considérons un corps, du poids de 100 kilogrammes, qui repose sur un plan horizontal, et supposons les surfaces de contact assez polies pour que le frottement soit négligeable. L'effet de la pesanteur sera détruit par la résistance du plan. Cherchons quelle sera la force qui, appliquée au centre de gravité du mobile et parallèle au plan, communiquera à tous ses points une vitesse donnée, de 4 mètres par seconde, par exemple : l'intensité de cette force, exprimée en kilogrammes, sera

$$R = \frac{100.4}{9,8088} = 40^{kil},78.$$

157. *Expression des forces constantes en ayant égard aux masses.* — Si l'on pose

$$\frac{p}{g} = m, \quad \frac{P}{g} = M,$$

l'expression des forces F, R deviendra

$$F = m\varphi, \quad R = m\varphi, \tag{1}$$

et ces résultats s'énonceront ainsi :

L'intensité d'une force constante a pour mesure le produit de la masse du mobile par l'accélération qu'elle lui imprime.

Il entre dans l'équation $F = m\varphi$ quatre grandeurs différentes : longueur, temps, force et masse. Quant à l'accélération ou à la vitesse acquise dans l'unité de temps, ce n'est pas une grandeur *sui generis :* elle se ramène aux unités de longueur et de temps. Nous avons déjà adopté pour ces deux unités le mètre et la seconde, et nous venons de fixer l'unité de masse. Dès lors, l'unité de force n'a plus

rien d'arbitraire : ce doit être la force qui, appliquée à l'unité de masse, lui imprime dans l'unité de temps une vitesse égale à l'unité de longueur. Or, l'équation

$$F = m\varphi = p^{kil}\frac{\varphi}{g}$$

donne, quand on y pose

$$\varphi = 1 \quad \text{et} \quad m = 1 \quad \text{ou} \quad p = g,$$

$F = 1^{kil}$; l'unité de force en dynamique n'est donc autre que le kilogramme, c'est-à-dire la même unité à laquelle nous avions déjà rapporté toutes les forces dans la Statique.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons à conserver l'une des équations (1),

$$F = m\varphi,$$

en entendant que la force F est appliquée, soit à un point matériel, soit au centre de gravité d'un corps solide de dimensions finies dont tous les points décrivent des droites parallèles.

Corollaires. — I. L'accélération φ restant constante, si la masse m varie, la force F varie proportionnellement. Donc *deux forces constantes, qui appliquées à deux masses différentes leur impriment une même accélération, sont entre elles comme ces masses.*

II. La force F restant constante, si la masse m varie, l'accélération φ variera en raison inverse de m. Donc, *si une même force constante agit successivement sur des masses différentes, les accélérations des mouvements qu'elle produit sont en raison inverse des masses.* Ce corollaire trouve son application dans l'étude des lois de la chute des corps au moyen de la machine d'Atwood. Si l'on désigne par m la masse de l'un des deux poids égaux qui se font équilibre, par μ la masse du poids additionnel, et par φ l'accélération du mouvement imprimé par ce point à la

masse totale $2m + \mu$, on a

$$\varphi = \frac{\mu}{2m + \mu} g.$$

Le rapport de φ à g peut ainsi être réduit autant que l'exige la commodité de l'observation.

III. En général, *deux forces constantes sont entre elles comme les produits des masses aux centres desquelles elles sont appliquées, par les accélérations qu'elles leur impriment.*

158. *Il n'existe pas de corps absolument fixes.* — On vient de voir que les vitesses des mouvements qu'une même force imprime à des masses différentes, en agissant sur elles pendant le même temps, sont en raison inverse des masses. Il en résulte que, si la masse d'un corps est très-considérable par rapport à la force motrice qui lui est appliquée, la vitesse du mouvement produit sera extrêmement petite, *sans être jamais nulle.* Tel sera, par exemple, le cas d'un mobile faisant corps avec la masse du globe terrestre et soumis à une percussion ordinaire. Il n'existe donc pas de corps absolument inébranlables ou *fixes*. Quand il nous arrivera de regarder des points, ou des axes, ou des plans comme fixes, nous voudrons seulement dire que, sous l'action des forces considérées, ces points, axes ou plans ne peuvent recevoir que des mouvements insensibles et négligeables.

159. *Quantité de mouvement.* — On remplace quelquefois, dans les proportions précédentes, les *accélérations* par les *vitesses* que les forces constantes font acquérir aux mobiles, partant du repos, *pendant un même intervalle de temps quelconque.* Cela est permis, car ces vitesses sont évidemment proportionnelles aux accélérations.

Le produit de la masse d'un corps par sa vitesse a reçu le nom de *quantité de mouvement,* d'où cet énoncé, qui n'exprime au fond rien de nouveau : *Deux forces constantes sont entre elles comme les quantités de mouvement qu'elles produisent dans le même temps.*

160. *Mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné* (abstraction faite du frottement). — Soient α l'inclinaison du plan sur l'horizon, p le poids d'un point quelconque m du mobile : cette force se décompose en deux, l'une $p\cos\alpha$ perpendiculaire au plan incliné, l'autre $p\sin\alpha$ parallèle à ce plan. Concevons que la même décomposition ait été faite pour toutes les molécules du corps pesant. Les composantes $p\cos\alpha$ n'auront d'autre effet que d'appuyer le mobile contre le plan : elles produiront, en s'ajoutant, la pression totale que le plan supporte et détruit par sa résistance. Les composantes $p\sin\alpha$ produiront le glissement de chaque molécule, parallèlement au plan. L'accélération φ de ce mouvement sera donnée par la proportion (154)

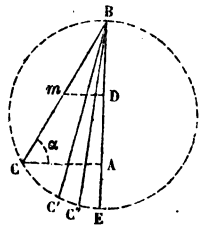
$$\frac{\varphi}{g} = \frac{p\sin\alpha}{p}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = g\sin\alpha;$$

elle sera donc une fraction constante de l'accélération g qui a lieu dans le sens vertical. Ainsi les lois du glissement seront les mêmes que celles de la chute libre des corps pesants. Seulement, le mouvement, étant aussi ralenti qu'on voudra, se prêtera mieux aux observations.

Ces considérations légitiment le procédé expérimental imaginé par Galilée pour déterminer les lois de la chute des graves.

Si le mobile part du sommet B du plan incliné BC (*fig.* 121), sans vitesse initiale, on aura la vitesse acquise

Fig. 121.



et l'espace décrit, à un instant quelconque, en remplaçant

dans les formules du n° 132 la constante a par $g\sin\alpha$: il viendra

$$v = gt\sin\alpha, \quad x = \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2,$$

d'où

$$v^2 = 2gx\sin\alpha.$$

Or $x\sin\alpha$ n'est autre que la projection de l'espace décrit Bm sur la verticale; donc

$$v^2 = 2g\text{BD},$$

ce qui montre que la vitesse à un instant quelconque est la même que si le mobile était tombé en chute libre d'une hauteur égale à la projection verticale de l'espace qu'il a décrit le long du plan. Il n'en faut pas conclure que le temps nécessaire au mobile pour glisser de B en m est égal à celui qu'il mettrait pour tomber verticalement de B en D : le rapport du premier au second est celui de 1 à $\sin\alpha$.

Si le mobile, en partant du point B, était animé d'une vitesse initiale v_0 dirigée suivant BC, on trouverait aisément que l'équation précédente se change en

$$v^2 - v_0^2 = 2g\text{BD}.$$

161. ***De l'accélération considérée sous un nouveau point de vue. — Mesure des forces d'intensité variable dans le mouvement rectiligne.*** — Lorsqu'on a égard à l'action des forces dans le mouvement rectiligne, l'accélération *à un instant quelconque* peut être envisagée sous un nouveau point de vue, qui va nous conduire à la mesure des forces d'intensité variable.

Considérons un point matériel animé d'un mouvement rectiligne varié quelconque. Ce point est nécessairement sollicité par une force d'intensité variable (151). Nous admettrons qu'au moment considéré cette force varie d'une manière *continue*, c'est-à-dire qu'elle ne passe pas brusquement d'une valeur à une autre. Soient v la vitesse acquise au bout du temps t, v' la vitesse au bout du temps $t + h$; φ l'accélération du mouvement *uniformément varié* qui succéderait au mouvement considéré si, à partir de l'époque t, la force conservait constamment l'intensité qu'elle a à cet

instant; φ' l'accélération du mouvement uniformément varié qui aurait lieu si la force ne devenait constante qu'à partir de l'époque $t + h$. Comme h est aussi voisin de zéro que l'on veut, on peut supposer que l'intensité de la force soit constamment croissante ou décroissante durant cet intervalle. Supposons-la croissante.

L'accroissement $v' - v$ de vitesse, qui a réellement lieu, sera plus grand que l'accroissement φh qui serait produit dans le même temps par la force agissant avec sa plus faible intensité, et plus petit au contraire que $\varphi' h$. On aura donc, en divisant les trois termes par h,

$$\varphi < \frac{v' - v}{h} < \varphi',$$

et, si h diminue indéfiniment, il vient

$$\varphi = \lim \frac{v' - v}{h},$$

pour $h = 0$.

Mais $\lim \frac{v' - v}{h}$ est précisément l'*accélération* $d_t v$ déjà définie (135). Donc il est indifférent de dire, ou que *l'accélération à un instant quelconque, dans le mouvement rectiligne varié, est la dérivée de la vitesse considérée comme fonction du temps,* ou bien qu'elle est *l'accélération du mouvement uniformément varié qui aurait lieu si la force conservait constamment l'intensité qu'elle a à cet instant.*

On remarquera l'analogie parfaite qui existe entre ces deux acceptions que l'on peut attribuer à l'accélération, et celles que nous avions déjà trouvées pour la vitesse dans le mouvement rectiligne varié (147).

Il résulte immédiatement de là et de la mesure des forces constantes (157) que l'intensité d'une force variable a pour mesure à chaque instant le produit $m\varphi$ de la masse du mobile par l'accélération qui a lieu à cet instant. Tout ce qui distingue ce cas de celui d'une force constante, c'est qu'ici l'accélération φ est une quantité *variable,* dérivée de la vitesse considérée comme fonction du temps.

162. *Récapitulation des formules du mouvement rectiligne.* — En désignant par F la force appliquée au point dont la masse est m; par x l'espace parcouru au bout du temps t, ou mieux la distance du mobile à un point fixe pris sur la droite qu'il décrit, et par $d_t x$, $d_t^2 x$, les dérivées première et seconde de cette fonction du temps; par v et φ la vitesse et l'accélération qui ont lieu à l'époque t, et par $d_t v$ la dérivée de v par rapport au temps, on a

$$v = d_t x,$$
$$\varphi = d_t v = d_t^2 x,$$
$$\mathrm{F} = m\varphi = m d_t v = m d_t^2 x, \quad \left(m = \frac{p}{g}\right).$$

Telles sont les formules usuelles du mouvement rectiligne.

Si, à un certain instant, la force F change brusquement d'intensité, ce qui n'empêchera pas la vitesse v de rester une fonction continue du temps (146), on partagera le temps t en plusieurs intervalles dont les limites seront marquées par les instants de discontinuité de la force; les formules

$$\varphi = d_t v, \quad \mathrm{F} = m d_t v$$

seront applicables dans toute l'étendue de chacun de ces intervalles. Seulement, quand on passera d'un intervalle au suivant, on devra tenir compte du changement brusque survenu dans la valeur de F.

Quand on ne considère qu'un seul point matériel en mouvement, rien n'empêche de prendre sa masse m pour unité : cela simplifie l'écriture des équations. Le poids p du mobile devient alors le nombre g, et l'on a $\mathrm{F} = \varphi$.

Quand l'espace x est donné en fonction du temps, la vitesse et la force à un instant quelconque s'en déduisent simplement par les règles du calcul des dérivées.

Mais, d'ordinaire, ce n'est pas ainsi que la question se pose : c'est l'accélération φ qui est donnée en fonction du temps t, ou de l'espace x, ou de la vitesse v, ou même de ces variables combinées; et il s'agit d'en déduire les expressions de v et de x en fonction de t. La résolution complète de ce problème exige l'emploi du calcul intégral et des séries.

163. *De la réaction égale et contraire à l'action.* — Lorsqu'un corps est mis en mouvement, l'expérience montre que l'*action* de l'agent moteur sur le corps est toujours accompagnée d'une *réaction*, égale et contraire, du corps sur le moteur.

Supposons, par exemple, qu'un poids soit suspendu au crochet d'un dynamomètre très-sensible, et qu'à l'aide d'une corde inextensible attachée à l'anneau on imprime à ce poids un mouvement uniformément accéléré. On verra le dynamomètre accuser, pendant toute la durée du mouvement, une flexion *constante*, supérieure à celle que produit le corps à l'état de repos. Le ressort est donc tiré à chaque instant par deux forces égales et contraires : l'une dirigée de bas en haut, qui est l'action du moteur, l'autre dirigée de haut en bas, qui est la *réaction* du mobile.

Dans cette expérience la force motrice est *constante*. Soient F son intensité, P le poids mobile (y compris celui du ressort auquel il est attaché), φ l'accélération du mouvement et v la vitesse au bout du temps t; on a

$$F - P = \frac{P}{g}\varphi,$$

d'où

$$\varphi = \left(\frac{F}{P} - 1\right) g$$

et

$$v = \left(\frac{F}{P} - 1\right) gt.$$

C'est l'excès de F sur P qui produit l'accélération. Si le mouvement devient uniforme, on a $\varphi = 0$, et par suite $F = P$. Le dynamomètre reprend alors la même flexion qu'à l'état de repos ou d'équilibre, c'est-à-dire celle qui est produite par le seul poids P.

L'égalité entre l'action et la réaction subsiste aussi pour une force d'intensité *variable*, car on peut considérer à

chaque instant l'intensité *actuelle* de la force comme demeurant constante pendant un intervalle de temps infiniment petit.

Enfin, on étend cette loi aux actions mutuelles de tous les points matériels, même lorsqu'il n'existe plus entre eux de liens physiques susceptibles de manifester la réaction, et on la formule ainsi :

Toutes les fois qu'un point matériel m agit sur un point m', pour lui imprimer une certaine quantité de mouvement, m' réagit sur m pour lui imprimer une quantité de mouvement égale et contraire.

Il en est de cette loi générale comme des autres que nous avons déjà posées, bien qu'imparfaitement établies par l'expérience directe. Leur vérité est confirmée par l'accord constant qui existe entre les conséquences de la théorie et les nombreux phénomènes observés.

164. *Du cas où la vitesse initiale du mobile n'a pas la même direction que la force.* — Nous avons admis jusqu'ici que la vitesse initiale du mobile était de *même direction* que la force, et que celle-ci demeurait invariable. S'il en est autrement, le mouvement cesse d'être rectiligne.

On peut toujours composer en une seule toutes les forces qui agissent à un instant donné sur le point matériel. La grandeur et la direction de cette résultante varient en général avec le temps; mais si l'on conçoit le temps partagé en intervalles infiniment petits, il est permis de considérer la résultante comme constante de grandeur et de direction pendant chacun de ces instants, et comme variant seulement d'un instant au suivant. Cela posé, il résulte des lois de l'inertie et du mouvement relatif que, pour déterminer les positions successives du mobile, il faudra *composer* à chaque instant deux mouvements simultanés rectilignes, savoir : le mouvement *uniforme*, qui aurait lieu dans le sens de la vitesse initiale ou acquise si la force n'existait

pas, et le mouvement uniformément varié que la force imprimerait dans un intervalle infiniment petit, suivant sa propre direction, au mobile partant du repos. Nous avons déjà montré dans un cas particulier (143), et sans faire intervenir la force, comment la composition de ces deux mouvements simultanés conduisait à une trajectoire curviligne.

165. *Formules générales du mouvement d'un point dans l'espace.* — Nous allons compléter ces premières notions, en donnant les formules générales du mouvement d'un point dans l'espace.

Projetons à chaque instant le mobile sur trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, comme dans le n° 140; chacune des *coordonnées* x, y, z est une fonction continue du temps t, compté à partir d'une époque convenue, et l'on peut poser

$$(1) \qquad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t).$$

Quand ces fonctions f, φ, ψ seront connues, toutes les circonstances du mouvement seront évidemment déterminées. Or chacune des équations (1) est celle du mouvement *rectiligne* d'un mobile fictif qui décrirait l'un des axes, de manière à être constamment la projection du mobile réel sur cet axe. Ainsi la détermination complète du mouvement d'un point dans l'espace revient à celle de trois mouvements rectilignes, qui sont ceux des projections du mobile sur trois axes fixes.

L'élimination de t entre les équations (1) fournira *deux* équations en x, y, z, qui seront satisfaites pour les coordonnées de tous les points de la trajectoire, et pour ces points seulement. Ces deux équations faisant connaître les valeurs de y et de z qui correspondent à une valeur quelconque de x, permettront de construire la trajectoire par points. On les appelle les *équations de la trajectoire*.

La grandeur et la direction de la vitesse du mobile et de la force qui le sollicite à un instant quelconque sont évidemment liées aux fonctions de t, que x, y, z représentent, de sorte que celles-ci étant connues, les autres puissent s'en déduire. Ce sont ces relations que nous allons établir.

Vitesse. — Si, à un instant donné, la force cessait d'agir, le mobile prendrait, d'après la loi de l'inertie, un mouvement rectiligne et uniforme. On est naturellement conduit à appeler *vitesse* du mouvement curviligne à l'instant considéré, la vitesse de ce mouvement rectiligne et uniforme, qui succède au premier et le continue dès que l'action de la force est suspendue. On va voir au surplus que cette définition s'accorde parfaitement avec celle du n° 130.

En même temps que le mouvement devient rectiligne et uniforme dans l'espace, les mouvements rectilignes des trois projections sur les axes deviennent uniformes (140), et leurs vitesses sont les projections de la vitesse v du mobile réel, c'est-à-dire (141)

$$v\cos\alpha, \quad v\cos\beta, \quad v\cos\gamma,$$

α, β, γ désignant les angles que sa direction fait avec les axes. Mais, puisque x, y, z sont les espaces décrits par ces mêmes projections jusqu'au moment où la force cesse d'agir, leurs vitesses respectives sont exprimées au même instant (147) par les dérivées

$$d_t x, \quad d_t y, \quad d_t z.$$

A cause de la continuité du mouvement, ces trois expressions doivent coïncider respectivement avec les précédentes. Donc

$$v\cos\alpha = d_t x, \quad v\cos\beta = d_t y, \quad v\cos\gamma = d_t z,$$

d'où

$$(2) \qquad v = \sqrt{(d_t x)^2 + (d_t y)^2 + (d_t z)^2},$$

et

$$(3) \qquad \cos\alpha = \frac{d_t x}{v}, \quad \cos\beta = \frac{d_t y}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{d_t z}{v}.$$

Ces relations feront connaître à chaque instant la grandeur et la direction de la vitesse. Nous les appliquerons plus loin au mouvement parabolique.

D'après des formules propres au calcul différentiel, et qui ne peuvent trouver place ici, on démontre que la valeur (2) de v ne diffère pas de la dérivée de l'arc s décrit par le mobile au bout du temps t, ou $d_t s$, et que les valeurs (3) de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se confondent avec celles des cosinus des angles que la tangente à la

trajectoire fait avec les axes. Ainsi est établie la concordance entre les notions que nous avions données sur le mouvement curviligne, en nous fondant uniquement sur des considérations de limites, et le point de vue sous lequel nous venons d'envisager la vitesse.

Force. — La force qui sollicite le point m au bout du temps t peut être remplacée par ses trois composantes X, Y, Z, parallèles aux axes Ox, Oy, Oz; remplaçons de même la vitesse dont le mobile est animé à cet instant par ses trois composantes $d_t x$, $d_t y$, $d_t z$. Puis, supposons que les composantes de la vitesse et de la force suivant l'axe Ox soient supprimées, pendant l'intervalle de temps infiniment petit qui va suivre, de manière que le point ne se meuve plus qu'en vertu des deux composantes de la vitesse et de la force parallèles aux axes Oy et Oz. Dans cette hypothèse, le mobile décrira évidemment un élément de courbe plane compris dans le plan parallèle à yOz, mené par la position qu'il occupait au commencement de l'instant considéré. Concevons maintenant un système de points matériels μ, μ', . . . animés de ce mouvement : si on rétablit sur le point m l'action des composantes supprimées, le mobile s'écartera *seul* du mouvement commun; et ce déplacement parallèle à l'axe Ox ne sera autre que le mouvement de la projection du mobile sur cet axe. Or, d'après le principe du mouvement relatif, ce déplacement doit être le même que si le mouvement commun n'existait pas. Donc *la projection du mobile sur l'axe* Ox *se meut, à chaque instant, comme si la composante de la force parallèle à cet axe agissait seule avec l'intensité qui lui est propre au même instant.* On peut donc appliquer à ce mouvement rectiligne les formules du n° 162. En désignant par m la masse du mobile, on aura

$$X = md_t^2 x.$$

De même, pour les mouvements des deux autres projections, on aura

$$Y = md_t^2 y, \quad Z = md_t^2 z.$$

Telles sont les trois équations fondamentales du mouvement curviligne. Associées à celles que nous avons établies plus haut pour

la vitesse, elles fournissent la solution de toutes les questions que l'on peut se proposer sur le mouvement d'un point dans l'espace.

166. *Application des principes précédents au mouvement parabolique des projectiles dans le vide.* — Supposons qu'un projectile pesant soit lancé avec une vitesse a, inclinée d'un angle α sur l'horizon, et que la résistance de l'air soit négligeable. Soient OA (*fig.* 122) la direction de cette vitesse, O le point de départ du mobile que nous réduisons à un simple point matériel (*), OF la verticale suivant laquelle agit la pesanteur avec une intensité constante, mesurée par l'accélération $g = 9^{m},8088$.

Il est évident que le mobile ne sortira pas du plan vertical FOA. Pour déterminer la trajectoire, nous rapporterons ses divers points à deux axes tracés dans le plan, l'horizontale Ox et la verticale Oy dirigée en sens inverse de la pesanteur.

Si l'on veut appliquer les équations générales du numéro précédent, on remarquera que l'on a

$$X = 0, \quad Y = -mg, \quad Z = 0 \quad \text{et} \quad z = 0.$$

Ces équations se réduisent donc à

$$d_t^2 x = 0, \quad d_t^2 y = -g.$$

On en tire

$$d_t x = c, \quad d_t y = -gt + c',$$

c et c' étant deux constantes arbitraires. Ces constantes représentent évidemment les composantes de la vitesse initiale suivant les axes Ox et Oy, c'est-à-dire

$$a\cos\alpha, \quad a\sin\alpha.$$

On a donc

$$d_t x = a\cos\alpha, \quad d_t y = a\sin\alpha - gt.$$

(*) On démontrera, dans un Cours plus élevé, que, quelles que soient les dimensions du corps, le mouvement de son centre de gravité est le même que celui d'un point matériel pesant, où toute la masse du mobile serait concentrée, et où la vitesse initiale et les forces seraient transportées parallèlement à elles-mêmes.

Enfin, remontant aux fonctions primitives x et y, il vient

$$x = at\cos\alpha, \quad y = at\sin a - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ici nous n'ajoutons pas de constantes, parce que pour $t = 0$ on doit avoir $x = 0$ et $y = 0$.

Sans supposer connues les équations générales du mouvement, on parvient aux résultats précédents par le raisonnement suivant, qui n'exige que la connaissance de la loi du mouvement relatif (148).

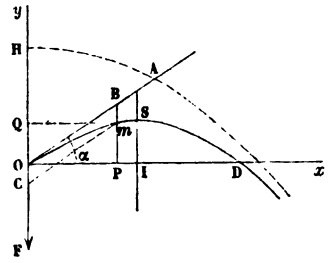
En vertu de la vitesse initiale seule, si la pesanteur n'agissait pas, le mobile parcourrait d'un mouvement uniforme, au bout du temps t, l'espace $OB = at$.

En vertu de la pesanteur seule, sans vitesse initiale, il tomberait suivant la verticale, pendant le même temps, de la quantité

$$OC = \frac{1}{2}gt^2.$$

Donc le mobile occupera au bout du temps t le sommet m du parallélogramme $BOCm$. Cela posé, si l'on prolonge Bm jusqu'à la

Fig. 122.



rencontre de l'axe Ox en P, et que l'on désigne OP par x, mP par y, on aura

$$x = at\cos\alpha,$$

$$y = BP - Bm = at\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

comme ci-dessus.

Ces expressions de x et de y déterminent complétement les mou-

vements rectilignes des projections P et Q du mobile sur les deux axes. On voit que la projection P parcourt l'horizontale Ox avec une vitesse constante $a\cos\alpha$, qui n'est autre que la projection sur cet axe de la vitesse initiale a. En même temps, la projection Q parcourt la verticale Oy d'un mouvement uniformément retardé, dont la vitesse, au bout du temps t, est la dérivée de la fonction y par rapport au temps, c'est-à-dire

$$a\sin\alpha - gt.$$

Ces résultats pouvaient être prévus, d'après ce qui a été dit (137 et 138) sur la composition et la décomposition des vitesses. En effet, la vitesse initiale a peut être remplacée par ses deux composantes $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$ dirigées suivant Ox et Oy. La première détermine seule le mouvement de la projection horizontale du mobile. La seconde se combine avec l'action exercée en sens contraire par la pesanteur, pour déterminer le mouvement de la projection verticale. La vitesse v du mobile au temps t sera donnée en grandeur et en direction par les formules générales du numéro précédent :

$$V = \sqrt{(d_t x)^2 + (d_t y)^2} = \sqrt{a^2 - 2agt\sin\alpha + g^2t^2},$$

ou

$$V = \sqrt{a^2 - 2gy},$$

et

$$\cos\lambda = \frac{a\cos\alpha}{v},$$

λ désignant l'inclinaison de la vitesse sur l'horizon.

Le mobile s'élèvera au-dessus de l'horizon tant que la vitesse de sa projection verticale sera positive, c'est-à-dire tant que l'on aura

$$a\sin\alpha > gt.$$

Le maximum de hauteur répond au temps

$$\theta = \frac{a\sin\alpha}{g},$$

et les valeurs correspondantes de x et y sont

$$x_1 = \frac{a^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}, \quad y_1 = \frac{a^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

La valeur de v se réduit alors à sa composante horizontale $a\cos\alpha$.

Pour simplifier ces résultats et ceux qui vont suivre, on introduit la hauteur de chute h qui correspond à la vitesse initiale (133), en posant

$$a^2 = 2gh,$$

et il vient

$$x_1 = h\sin 2\alpha, \quad y_1 = h\sin^2\alpha.$$

Ces valeurs fixent la position du point le plus haut S de la trajectoire. Pour $\alpha = 45$ degrés, on a

$$y_1 = \frac{h}{2}.$$

Le projectile, lancé sous un angle de 45 degrés, s'élève donc à une hauteur moitié de celle qu'il atteindrait s'il était lancé dans la verticale.

Le temps continuant à croître, le mobile se rapproche de l'horizon, et il l'atteint en un point D pour lequel $y = 0$, c'est-à-dire au bout du temps

$$T = \frac{2a\sin\alpha}{g},$$

temps double de θ. Il emploie donc le même temps pour redescendre que pour monter. La valeur correspondante de x est

$$OD = 2h\sin 2\alpha;$$

on l'appelle *l'amplitude du jet*. Elle est double de la distance OI qui répond au point le plus haut. La vitesse v se réduit à a pour $y = 0$. Elle est donc la même qu'au point de départ, et l'angle sous lequel le projectile atteint l'horizon a pour cosinus $\frac{a\cos\alpha}{a} = \cos\alpha$. Il est donc le même que l'angle de projection. L'amplitude du jet ne change pas quand on change α en $90^\circ - \alpha$: il y a donc deux directions, faisant avec l'horizon des angles complémentaires, suivant lesquelles le mobile lancé avec la même vitesse atteindra l'horizon au même point. Le *maximum d'amplitude* du jet répond à $\alpha = 45$ degrés, et il est égal à $2h$, c'est-à-dire double de la hauteur due à la vitesse initiale.

Pour avoir l'*équation de la trajectoire*, on éliminera t entre les expressions générales de x et de y, et il viendra

$$y = x\tan\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}.$$

C'est l'équation d'une *parabole* qui a pour *sommet* le point S, pour *axe* la verticale SI, et dont la tangente à l'origine O a même direction que la vitesse initiale (*).

Parabole de sûreté. — Nous avons vu qu'avec une vitesse initiale de grandeur donnée l'horizon peut être atteint sous deux directions.

En général, un point déterminé du plan sera atteint en lançant le même projectile avec une même vitesse, suivant deux directions différentes. En effet, prenons pour inconnue dans l'équation précédente la valeur de $\tan\alpha$, qui répond à un système de valeurs (x', y') attribuées à x et y ; nous aurons l'équation du second degré

$$x'^2\tan^2\alpha - 4hx'\tan\alpha + (x'^2 + 4hy') = 0;$$

d'où

$$\tan\alpha = \frac{2h}{x'} \pm \frac{1}{x'}\sqrt{4h^2 - 4hy' - x'^2}.$$

Si donc on a

$$4h^2 > 4hy' + x'^2,$$

il y aura deux valeurs réelles de $\tan\alpha$, et, par conséquent, deux directions sous lesquelles on atteindra le point (x', y').

(*) En chassant le dénominateur et complétant le carré du binôme formé par les termes en x, on donne à l'équation la forme

$$(x - 2h\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 4h\cos^2\alpha(h\sin^2\alpha - y);$$

d'où l'on voit qu'en posant

$$x = 2h\sin\alpha\cos\alpha + X, \quad y = h\sin^2\alpha - Y,$$

il vient

$$X^2 = 4h\cos^2\alpha . Y.$$

Sous cette forme la propriété caractéristique de la parabole est en évidence. Le changement des variables x, y en X, Y a eu pour effet de transporter l'origine des axes du point O au sommet S.

Si l'on a au contraire

$$4h^2 < 4hy' + x'^2,$$

le problème sera impossible : le point donné ne pourra être atteint sous aucune direction.

Enfin si l'on a

$$4h^2 = 4hy' + x'^2 \quad \text{ou} \quad x'^2 = 4h(h - y'),$$

les deux directions se réduiront à une seule. Cette dernière équation convient à une infinité de points du plan, puisqu'en prenant à volonté x' on en tire une valeur correspondante pour y'. Elle représente une parabole qui a pour axe la verticale Oy, et dont le sommet est à la hauteur $OH = h$.

Cette courbe a reçu le nom de *parabole de sûreté*, parce qu'elle est la ligne de démarcation entre les points du plan qui peuvent être atteints par le projectile sous deux directions différentes, et ceux qui sont garantis de toute atteinte.

167. *Cas le plus simple du choc des corps.* — Deux sphères homogènes, dont tous les points décrivent des droites parallèles à la ligne qui joint leurs centres C, C', viennent se choquer en un point A de leur surface. On donne les masses m, m' des deux mobiles, leurs vitesses v, v' à l'instant où le choc commence; et la question est de déterminer leurs vitesses V, V' à la fin du choc.

v et v' sont des quantités de même signe ou de signes contraires, selon que les deux sphères vont dans le même sens ou à la rencontre l'une de l'autre. Nous conviendrons de donner le signe + à la vitesse v que nous supposons dirigée de C vers C' et plus grande que v'.

Pour se faire une idée juste du phénomène qui nous occupe, il faut avoir égard à deux propriétés de la matière, la compressibilité et l'élasticité. Quand deux corps se choquent, ils exercent d'abord l'un contre l'autre, à raison de la différence des vitesses, des efforts plus ou moins considérables, en vertu desquels leur figure subit près du point de contact une certaine déformation.

Puis, l'élasticité entre en jeu, et les deux corps tendent à reprendre leur figure primitive, en continuant à s'appuyer l'un contre l'autre. Enfin ils se séparent, et le choc est terminé.

Nous pouvons donc distinguer deux périodes dans le choc. Durant la première, la vitesse v de la sphère m diminue d'une manière continue, et celle de m' augmente, jusqu'à ce que les deux vitesses soient devenues égales : à cet instant, les deux corps n'exercent plus aucune pression l'un sur l'autre. Dans la seconde période, la sphère m continue à perdre graduellement de sa vitesse et la sphère m' à en gagner, jusqu'à ce que les deux corps se séparent.

Tout cela se passe dans un temps très-court, sans déplacement sensible des masses; c'est pourquoi l'on peut négliger, pendant la durée du choc, l'effet des forces motrices ordinaires telles que la pesanteur, effet incomparablement plus petit que celui des actions mutuelles des deux corps en contact.

Cela posé, entrons dans le détail du calcul.

Au bout du temps t, qui répond à une époque quelconque de la durée du choc, soient x et x' les distances des centres C et C' à une origine fixe que nous prendrons à gauche de C sur la ligne des centres; R la pression exercée au même instant par la masse m sur m'. On ne connaît pas la grandeur variable de cette pression; on sait seulement qu'elle est appliquée au point A et dirigée suivant la normale commune CAC' dans le sens AC'. La réaction de la masse m' sur m sera égale et contraire à R. Si l'on conçoit que ces forces soient appliquées aux deux mobiles, et qu'on transporte leurs points d'application aux centres C, C', ces centres se mouvront évidemment comme deux points matériels libres, de masses m et m', sollicités l'un par la force $-$ R, l'autre par la force $+$ R, et l'on aura (162)

$$md_t^2x = -R, \quad m'd_t^2x' = +R.$$

En ajoutant les deux équations membre à membre, l'inconnue R disparaît, et il vient

$$md_t^2x + m'd_t^2x' = 0,$$

d'où

$$md_tx + m'd_tx' = c, \tag{1}$$

c désignant une *constante*, c'est-à-dire une quantité indépendante du temps.

Or, à l'instant où le choc commence, on a par hypothèse

$$d_t x = v, \quad d_t x' = v';$$

donc

$$c = mv + m'v',$$

et substituant dans l'équation (1), on a

$$(2) \qquad m d_t x + m' d_t x' = mv + m'v'.$$

Ainsi, *la somme des quantités de mouvement des deux corps reste constante pendant toute la durée du choc.*

A la fin de la première période du choc, les vitesses des deux corps sont devenues égales; soit u leur valeur commune : on tire de l'équation (2), en faisant $d_t x = d_t x' = u$,

$$(3) \qquad u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Si les corps étaient complétement *mous*, c'est-à-dire entièrement dépourvus d'élasticité, cette période du choc existerait seule, et tout serait fini au moment que nous venons de considérer. Les deux masses se mouvraient avec la vitesse commune donnée par la formule (3), en restant juxtaposées et conservant la déformation que le choc aurait produite.

Les corps mous que la nature nous présente se rapprochent plus ou moins de ce cas extrême.

Dans les applications numériques, on remplacera les masses m, m' par les poids P, P' qui leur sont proportionnels.

La vitesse v étant supposée plus grande que v', on voit aisément que la valeur de u est plus petite que v et plus grande que v'. Ainsi la sphère m a perdu une partie $v - u$ de sa vitesse, et la sphère m' a gagné $u - v'$. Il résulte de l'équation (2) que *les quantités de mouvement* $m(v - u)$, $m'(u - v')$, *gagnées et perdues, sont égales.*

Le sens du mouvement commun sera celui du corps qui possédait avant le choc, non pas toujours la plus grande vitesse, mais la plus grande *quantité de mouvement.* Car si m', par exemple, va au-devant de m, sa vitesse v' sera négative et le sens du mouvement commun sera déterminé par le signe de la somme

algébrique $mv + m'v'$. Si mv l'emporte sur la valeur absolue de $m'v'$, u sera positif et le mouvement commun aura lieu dans le sens CC', qui est celui du mouvement de la masse m.

De la formule (3) on peut tirer plusieurs conséquences intéressantes.

Si les deux mobiles vont à la rencontre l'un de l'autre avec des quantités de mouvement égales, on aura

$$mv = -m'v',$$

et, par suite,

$$u = 0;$$

les deux corps se réduiront au repos.

On trouve encore $u = 0$, quand on suppose

$$v' = 0 \quad \text{et} \quad m' = \infty.$$

Cette hypothèse d'une masse infiniment grande et en repos avant le choc correspond au cas d'un obstacle inébranlable contre lequel le corps mou vient se buter.

Enfin, si $m = m'$, on a

$$u = \frac{v + v'}{2}.$$

La vitesse commune des deux masses égales est la moyenne arithmétique de leurs vitesses primitives.

Revenons au cas où les corps sont élastiques. Nous supposerons, pour simplifier le problème, que l'élasticité soit *parfaite*, c'est-à-dire que les deux sphères reprennent exactement leur forme primitive, et que la pression normale R repasse, après le moment où les vitesses se sont nivelées, par les mêmes valeurs qu'elle avait avant cet instant, pour des valeurs égales de la distance des deux centres. Dans cette hypothèse, on peut admettre comme évident que les masses m, m' éprouveront, durant la seconde période du choc, l'une une perte de vitesse, l'autre une augmentation, précisément égales à celles qu'elles ont éprouvées durant la première. Leurs vitesses finales seront donc

$$(4) \qquad \begin{cases} V = u - (v - u) = 2u - v, \\ V' = u + (u - v') = 2u - v'; \end{cases}$$

et, remplaçant u par sa valeur (3),

$$(5)\qquad \begin{cases} V = \dfrac{(m-m')v + 2m'v'}{m+m'}, \\ V' = \dfrac{(m'-m)v' + 2mv}{m+m'}. \end{cases}$$

Les formules (4), retranchées l'une de l'autre, donnent

$$V - V' = -(v - v'),$$

ce qui montre qu'après le choc de deux sphères parfaitement élastiques, la *vitesse relative* change de signe en conservant la même grandeur absolue.

Examinons quelques cas particuliers.

Si l'on suppose $v' = 0$, les formules (5) donnent

$$V = \frac{m-m'}{m+m'}v, \quad V' = \frac{2m}{m+m'}v;$$

ainsi la sphère m, qui était seule en mouvement au début du choc, continue à se mouvoir dans le même sens, si sa masse est plus grande que celle de l'autre; dans le cas contraire, elle se réfléchit. Si l'on suppose en outre la masse m' excessivement grande par rapport à m, on a

$$V = -v, \quad V' = 0,$$

ce qui indique que la sphère élastique, venant frapper un obstacle fixe, se réfléchit avec une vitesse égale et contraire à celle qu'elle avait avant le choc. Si $m = m'$, on trouve

$$V = 0, \quad V' = v.$$

Ainsi, la sphère choquée prend la vitesse de l'autre qui est réduite au repos.

En général, l'hypothèse $m = m'$, introduite dans les formules (5), donne

$$V = v', \quad V' = v.$$

Il y a donc échange de vitesse entre deux masses égales, parfaitement élastiques, qui se choquent.

Bien que les corps naturels ne soient jamais doués d'une élasticité *parfaite*, ces résultats de la théorie sont sensiblement confirmés par les expériences que l'on fait dans les cours de Physique sur le choc des billes élastiques.

Les deux cas que nous venons de discuter, celui des corps complétement mous et celui des corps parfaitement élastiques, sont les seuls où l'on sache déterminer les vitesses finales des deux mobiles entre lesquels le choc a eu lieu. Mais quel que soit le degré d'élasticité, on peut établir une proposition importante concernant le *mouvement du centre de gravité du système*.

Soit x_1 la distance de ce centre de gravité au point déjà pris pour origine des distances x et x'. Le théorème des moments (40) donne, en remplaçant les poids par les masses qui leur sont proportionnelles,

$$(m + m')\,x_1 = mx + m'x',$$

et, prenant les dérivées,

$$(m + m')\,d_t x_1 = m d_t x + m' d_t x'.$$

Or le second membre de cette équation a une valeur constante d'après l'équation (2). Donc il en est de même de la vitesse $d_t x_1$. Désignons-la par v_1; nous aurons, avant comme après le choc,

$$v_1 = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Ainsi, *la vitesse du centre de gravité n'est pas altérée par le choc des corps sphériques* mous ou élastiques. *Elle est égale à la somme des quantités de mouvement initiales des deux corps divisée par la somme des masses.*

Cette proposition n'est qu'un cas particulier du *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*, que l'on démontrera dans un Cours plus élevé, pour tout système dont les points ne sont soumis qu'à des actions réciproques, égales et contraires.

EXERCICES.

I. Étant donnée une circonférence de cercle dont le plan est vertical (*fig.* 121), on suppose qu'un point matériel pesant soit assu-

jetti à descendre du point le plus haut B, sans vitesse initiale, en suivant l'une quelconque des cordes BC, BC′, BC″, . . . de ce cercle. — Démontrer que le temps qu'il emploiera à décrire cette corde sera constant, et égal à celui qu'il mettrait à parcourir en chute libre le diamètre vertical BE.

II. Deux corps pesants partent en même temps de deux points élevés de la même hauteur h au-dessus de l'horizon. L'un suit la verticale sans vitesse initiale; l'autre est assujetti à descendre le long d'un plan incliné avec une vitesse initiale donnée. — Déterminer l'inclinaison de ce plan par la condition que les deux mobiles atteignent en même temps l'horizon (on néglige le frottement et la résistance de l'air).

III. Deux corps pesants situés sur une ligne horizontale sont lancés au même instant dans un même plan vertical, avec des vitesses différentes et dirigées perpendiculairement l'une à l'autre. — Déterminer : 1° le temps au bout duquel la distance des deux mobiles sera *minimum*; 2° la condition pour qu'ils se rencontrent et le temps au bout duquel la rencontre aura lieu.

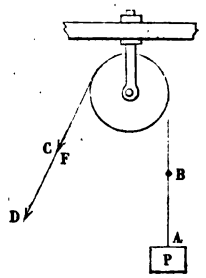
IV. Le centre d'un corps sphérique élastique en repos, dont la masse est m, est situé à une distance donnée d'un plan fixe. Ce corps est choqué par une autre sphère élastique, de masse m, animée d'une vitesse donnée, commune à tous ses points et dirigée perpendiculairement au plan fixe : après le choc, il va se réfléchir contre le plan et vient de nouveau rencontrer la sphère m' en un point donné de la droite que son centre parcourt. — Connaissant la masse m', on propose de déterminer m, et réciproquement. (Comme les sphères sont supposées homogènes, on remplacera les masses par les cubes des rayons qui leur sont proportionnels. On négligera l'action de la pesanteur entre les deux rencontres.)

DIX-NEUVIÈME ET VINGTIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Notions sur le travail des forces. — Ce qu'on appelle travail d'une force constante appliquée à un point dont le déplacement est rectiligne. — Unité de travail. — Faire voir que, dans les machines simples à l'état d'équilibre ou de mouvement uniforme, et sollicitées uniquement par une puissance et une résistance, le travail moteur est égal au travail résistant. (Dans le cas de la poulie mobile, on supposera les cordons parallèles.) — Influence des résistances passives. — Dans la pratique, le travail moteur est toujours plus grand que le travail résistant utile.

168. *Du travail en Mécanique.* — L'idée de *travail*, en Mécanique, implique toujours deux choses : l'action d'une force, motrice ou résistante, et le déplacement du point d'application de cette force. Par exemple, un poids P est suspendu (*fig.* 123) à une corde qui passe sur une

Fig. 123.



poulie fixe et dont l'autre extrémité est tirée tangentiellement par la main d'un ouvrier. Tant que l'effort exercé par celui-ci ne fait qu'équilibrer le poids P, sans lui imprimer de mouvement, il n'y a pas de travail mécanique produit. Mais si le poids monte d'une certaine hauteur $AB = h$, le produit Ph est dit le *travail du poids* P, *correspondant au chemin h.*

En même temps que la corde s'enroule du côté de la résistance ou du poids, elle se déroule d'une quantité égale du côté de la force motrice; en sorte que la main de l'ouvrier a finalement marché, dans le sens de la tangente, d'une quantité $CD = h$. Si donc F désigne la force motrice, Fh mesure le travail de cette force. Ce qui distingue ce travail du précédent, c'est que le chemin parcouru par le point d'application C est dirigé *dans le sens de la force motrice,* tandis que le contraire avait lieu pour la résistance P. L'un a reçu le nom de travail *moteur,* et l'autre de travail *résistant.*

De même, si l'on fait agir la vapeur à pression constante P sur un piston dont l'étendue de la course est l, Pl sera le travail de la vapeur, etc.

L'expression de *travail,* donnée au produit d'une force par un chemin parcouru, a été introduite dans la science par M. Coriolis (*Calcul de l'effet des machines*, 1829). Nous reviendrons, à propos du treuil, sur cette dénomination, pour montrer comment ce produit peut servir de mesure au travail que fait un ouvrier dans sa journée, et, par suite, au salaire qui lui est attribué.

169. *Extension de la définition du travail. — Sa mesure.* — Nous avons supposé que le point d'application se mouvait suivant la direction même de la force, soit dans le même sens, soit en sens contraire, et que la force conservait une grandeur et une direction constantes. Il est nécessaire de lever ces restrictions.

Quand le point d'application d'une force constante se meut en ligne droite, mais dans une direction différente de celle de la force, ce n'est plus le chemin parcouru lui-même, mais *sa projection sur la direction de la force,* qui entre comme facteur dans le travail. Soient ε le chemin parcouru par le point d'application d'une force F; α l'angle, aigu ou obtus, que la direction du chemin fait avec celle

de la force : le travail s'exprimera par le produit

$$F\varepsilon\cos\alpha.$$

Si l'on remarque que $F\cos\alpha$ représente (18) la *force estimée suivant la direction du chemin,* on peut dire encore que *le travail est égal au produit de la force, estimée suivant la direction du chemin, par la longueur du chemin.* Ce travail sera positif ou négatif, suivant que l'angle α sera aigu ou obtus, c'est-à-dire suivant que la projection du chemin sera dirigée dans le sens de la force ou en sens contraire. Il sera dit *moteur* dans le premier cas, et *résistant* dans le second.

Il résulte de là que le travail s'annule dans trois circonstances :

1° Quand la force F est nulle. — Cas d'un mobile se mouvant en vertu de sa vitesse acquise et sans traction.

2° Quand le déplacement ε est nul. — Cas d'un mobile buté contre un obstacle inébranlable, malgré la traction.

3° Quand l'angle α est droit. — Cas d'un effort exercé dans une direction normale au chemin parcouru par le mobile.

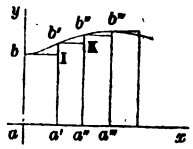
Quand le point d'application de la force se meut sur une ligne courbe, et que la force, toujours d'intensité constante, est dirigée suivant une tangente à la courbe (cas de la manivelle ordinaire), on conçoit l'arc parcouru divisé en éléments ε assez petits pour qu'on puisse les considérer comme rectilignes et confondus en direction avec les tangentes successives. Le travail correspondant à chaque élément prend le nom de *travail élémentaire :* c'est le produit $F\varepsilon$ de la force par l'élément du chemin ; et la somme de tous ces produits est dite le *travail total.* Comme F est facteur commun, cette somme est égale à Fl, l désignant la longueur totale de l'arc parcouru. Ainsi, dans ce cas, comme dans le premier que nous avons examiné, le travail total d'une force d'intensité constante est égal au pro-

duit de la force par le chemin que parcourt son point d'application.

Enfin, dans le cas général, où le déplacement du point d'application change continuellement de direction, et où la force est elle-même variable d'intensité et de direction, la détermination rigoureuse du travail n'est plus du domaine des éléments de Mécanique. Cependant il existe un procédé pratique que nous pouvons faire connaître. Supposons qu'on ait divisé, comme ci-dessus, le chemin parcouru en parties assez petites, pour qu'on puisse les considérer comme rectilignes et la force comme constante pendant le temps très-court que le mobile emploie à parcourir chacune d'elles. Les variations de la force auront ainsi lieu par intermittences, en passant d'un élément de chemin au suivant; et cette hypothèse différera aussi peu qu'on le voudra de la réalité.

Cela posé, portons sur une droite indéfinie ax (*fig.* 124) des longueurs aa', $a'a''$, $a''a'''$,... égales aux éléments de chemin; et par les points a, a', a'',... élevons des perpendiculaires ab, $a'b'$, $a''b''$,... égales aux valeurs correspondantes de la *force estimée suivant les directions* de ces éléments (valeurs déduites du calcul ou fournies par l'observation). Choisissons la même longueur pour représenter les unités de force et de chemin. Enfin,

Fig. 124.



joignons les points b, b', b'', b''',... par un trait continu. Les aires des rectangles $ab\mathrm{I}a'$, $a'b'\mathrm{K}a''$,... mesureront les travaux *élémentaires* de la force variable, et leur somme, ou le travail *total*, se rapprochera d'autant plus de l'*aire de la courbe*, c'est-à-dire de la surface comprise entre l'axe ax, la courbe et les deux ordonnées extrêmes, que les parties dans lesquelles on aura divisé le chemin parcouru seront plus petites.

Or, cette aire peut être mesurée par un moyen mécanique. Il suffit de recouvrir la feuille de papier d'une feuille de plomb bien homogène et de la peser. Le rapport de son poids à celui d'une feuille de même substance recouvrant l'unité de surface exprimera l'aire, et par suite le travail cherché.

170. *Unité de travail : kilogrammètre.* — Il résulte de la définition du travail et du choix déjà fait des unités de force et de longueur, que l'unité de travail doit être *le travail correspondant à un poids d'un kilogramme élevé à un mètre de hauteur.* Cette unité s'appelle *kilogrammètre.*

On voit que l'idée de travail est indépendante de la considération du temps. Cependant, quand il s'agit de comparer entre eux les résultats fournis par des forces motrices qui fonctionnent périodiquement et d'une manière continue, on comprend qu'il y ait lieu de faire intervenir le temps. Car il n'est pas indifférent pour l'industrie qu'une même quantité de travail soit produite dans un temps plus ou moins long.

Par exemple, la force de l'homme peut être employée de plusieurs manières à élever verticalement des fardeaux. Supposons d'abord qu'on fasse agir l'ouvrier sur une manivelle. L'expérience a appris qu'un ouvrier était capable de faire tourner une manivelle de $0^{m},35$ de rayon, à raison de 20 tours (environ) par minute, en exerçant sur elle un effort tangentiel de 8 kilogrammes ; et que ce travail pouvait se continuer 8 heures par jour sans que l'ouvrier fût surmené, déduction faite des temps de repos. Le nombre de kilogrammètres correspondant sera

$$3,1416 \times 0,7 \times 20 \times 8 \times 60 \times 8 = 168892^{km} \text{ par jour.}$$

Supposons maintenant qu'on ait l'idée d'utiliser la force de l'homme en lui faisant d'abord gravir une rampe ou une échelle sans fardeau, puis le faisant descendre, en vertu de son poids, dans un plateau suspendu à une corde qui passera sur une poulie de renvoi et supportera par son autre extrémité le fardeau à monter. L'expérience a été faite dans les travaux de terrasse-

ment du fort de Vincennes : le manœuvre, montant une échelle haute de 13 mètres, a pu élever 310 fois par jour à cette même hauteur un poids à peu près égal à celui de son corps, soit 65 kilogrammes. La quantité de travail correspondante est

$$310.65.13 = 261950^{kgm} \text{ par jour.}$$

Ce mode d'emploi de la force motrice est donc beaucoup plus avantageux que le premier; et l'on voit que la considération du temps a dû intervenir dans cette comparaison.

171. *Travail de la résultante de plusieurs forces constantes, appliquées à un point dont le déplacement est rectiligne.* — On a vu (27) que, lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point, *la résultante estimée suivant un axe quelconque, est égale à la somme* (algébrique) *des composantes estimées suivant le même axe.* Si l'on prend pour axe la direction du chemin, et qu'on multiplie tous les termes de l'égalité précédente par la longueur même du chemin, on aura ce théorème :

Le travail de la résultante de plusieurs forces constantes, appliquées à un point dont le déplacement est rectiligne, est égal à la somme (algébrique) *des travaux des composantes.*

Ce théorème s'étend au travail continu d'un système de forces quelconques appliquées à un point mobile; on n'a qu'à regarder le chemin décrit comme divisé en éléments rectilignes, et les forces comme constantes pendant l'intervalle de temps infiniment petit qui correspond à chaque élément de chemin.

On remarquera que les composantes normales au chemin décrit n'influent pas sur le travail.

Si les forces se font équilibre, leur résultante est nulle; le travail de cette résultante est donc égal à zéro, et par suite, *la somme des travaux des forces est nulle pour tous les déplacements possibles du point d'application.*

Réciproquement, *si la somme des travaux des forces*

est nulle pour trois déplacements du point d'application, non compris dans un même plan, on verra, comme dans le n° 29, que *l'équilibre existe.*

172. *Travail de la pesanteur dans le mouvement d'un corps ou système de corps pesants.* — Soient p le poids de l'un des points matériels en mouvement; z sa distance à un plan horizontal fixe, à un instant quelconque; z_0 sa distance initiale à ce même plan; P le poids total du système, Z et Z_0 les distances de son centre de gravité au plan horizontal dans les deux positions considérées. Le théorème des moments (41) donne

$$PZ_0 = \sum pz_0, \quad PZ = \sum pz$$

(la caractéristique $\sum$ désignant une somme de termes semblables); d'où

$$P(Z - Z_0) = \sum p(z - z_0).$$

Or, le second nombre est la somme des travaux produits par les poids de tous les points du système, lorsqu'ils passent simultanément de la première position à la seconde; et le premier membre est le travail que produirait un poids unique, égal à la somme de tous les poids élémentaires, qu'on imaginerait appliqué au centre de gravité du système; on a donc ce théorème :

Le travail de la pesanteur, dans le mouvement d'un corps ou système de corps pesants, est le même que si toutes les masses étaient concentrées au centre de gravité.

On voit que ce travail ne dépend pas des trajectoires décrites par les différents points du système entre les deux positions considérées, mais uniquement de la hauteur verticale dont le centre de gravité s'est abaissé ou élevé.

Il est bon de remarquer que ce théorème n'exige pas que

le système soit de figure invariable : le centre de gravité est ici un point *fictif* où la résultante de toutes les forces de la pesanteur serait appliquée à chaque instant, si on imaginait que la figure du système fût solidifiée à cet instant.

173. *Des machines à l'état de mouvement. — Forces mouvantes et résistantes.* — Jusqu'à présent nous n'avons considéré les machines qu'à l'état de repos, ou plutôt d'équilibre. Mais, dans la plupart des cas, les machines n'ont pas pour but de faire équilibre à des résistances ; elles doivent les vaincre et déplacer leurs points d'application. C'est alors seulement qu'il y a un *travail* produit.

Dans les machines à l'état de mouvement, on distingue deux genres de forces :

1° *Les forces mouvantes.* Ce sont celles qui impriment le mouvement à la machine : telle est l'action des moteurs animés, celle du vent, d'une chute ou d'un cours d'eau, de la vapeur, des gaz comprimés, etc. Les déplacements des points d'application sont dirigés dans le sens même des forces, ou du moins font avec elles des angles aigus. Le travail de ces forces est *positif* ou *moteur.*

2° *Les forces résistantes.* Ce sont celles que la machine doit vaincre. Mais il y a deux ordres de résistances :

Les unes, telles que la cohésion des molécules des corps que l'on veut réduire en poudre, le poids des matériaux que l'on veut élever, etc., sont dites *résistances utiles.* La machine, en les surmontant, produit l'effet utile en vue duquel on l'a établie.

Les autres, telles que le frottement des différentes pièces de la machine qui doivent glisser les unes sur les autres, la résistance au roulement, la roideur des cordes (résistance que les cordes opposent, par suite de leur imparfaite flexibilité, à l'enroulement sur la gorge des poulies); la résistance du milieu dans lequel la machine doit se mouvoir, etc., sont dites *résistances passives.* On s'attache à

diminuer le plus possible leur influence, sans jamais pouvoir l'annuler. Nous en donnerons un exemple en étudiant le travail des forces dans le treuil.

Il y a cependant des circonstances particulières où les résistances passives sont mises à profit : c'est quand il s'agit de modérer le mouvement d'une machine, ou même de l'arrêter. Mais, en général, il est vrai de dire que les résistances passives donnent lieu, durant le travail ordinaire, à une dépense de force motrice en pure perte, qu'il faut s'efforcer de réduire à son minimum.

Que les résistances soient utiles ou passives, leurs points d'application se meuvent toujours en sens contraire de ces forces, ou du moins font avec elles des angles obtus. Leur travail est donc *négatif* ou *résistant*.

Pour distinguer le travail correspondant aux résistances utiles de celui qui est dû aux résistances passives, on appelle le premier travail résistant *utile*, le second travail résistant *passif*.

174. *Du frottement pendant le mouvement.* — La principale des résistances passives est la force de frottement. Nous l'avons déjà étudiée (117) à l'instant ou un corps *commence* à glisser sur un autre. Nous avons fait connaître les deux lois importantes découvertes par Amontons, savoir :

La force de frottement est proportionnelle à la pression ;

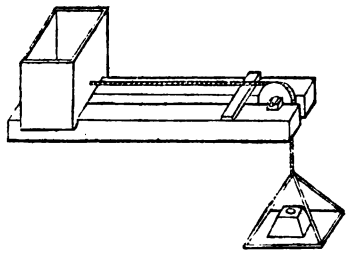
Elle est indépendante de l'étendue de la surface frottante.

Mais, en estimant au *tiers* de la pression la valeur du frottement pour le bois et les métaux enduits de graisse, Amontons en avait beaucoup exagéré l'effet. D'ailleurs ses expériences, non plus que celles de ses contemporains, de Lahire et Parent, n'apprenaient rien de précis sur l'influence que pouvait avoir sur le frottement *la vitesse* du mouvement.

Expériences de Coulomb. — Près d'un siècle après, en 1781, Coulomb exécuta à Rochefort de nouvelles expériences. L'appareil dont il se servait consistait en un banc horizontal, formé de deux madriers parallèles sur lesquels il faisait glisser un traîneau

plus ou moins chargé (*fig.* 125). A cet effet, le traîneau était tiré par une corde qui passait sur une poulie de renvoi et supportait

Fig. 125.



par son extrémité inférieure un plateau destiné à recevoir des poids. On augmentait peu à peu la charge du plateau jusqu'au moment où le traîneau entrait en mouvement. En clouant, sur les madriers et sous le traîneau, des règles de diverses substances, on pouvait faire varier à volonté les surfaces frottantes.

Coulomb vérifia d'abord les lois d'Amontons sur le frottement au départ. Il observa en outre que, pour les corps compressibles, la force de frottement n'atteignait toute sa valeur qu'après une certaine durée de contact, et qu'elle était plus grande au départ que pendant le mouvement.

La durée du contact nécessaire pour assurer au frottement sa plus grande intensité est très-variable d'une substance à une autre : ainsi, pour deux règles de bois frottant à sec l'une sur l'autre, elle est d'une ou deux minutes; pour des substances hétérogènes, telles que bois sur métaux, elle peut être de plusieurs heures; au contraire, pour les métaux frottant sur métaux, elle est à peine appréciable.

Coulomb étudia ensuite le frottement des corps *pendant le mouvement*. Ayant placé dans le plateau un poids capable de vaincre le frottement, il reconnut que les espaces parcourus par le traîneau croissaient proportionnellement aux carrés des temps. Le mouvement était donc uniformément accéléré (132), et par conséquent dû à une force constante (151). Or cette force est l'action de la pesanteur diminuée de celle du frottement; et comme la première est constante, il en résulte que la seconde l'est aussi.

Soient F la force de frottement, à un instant quelconque t; Q le poids du traîneau et de sa charge, P celui du plateau chargé, T la tension de la corde, φ l'acccélération du mouvement ou $\frac{2e}{t^2}$, e désignant l'espace parcouru, mesuré depuis le départ. Puisque tous les points du traîneau décrivent dans le glissement des droites égales et parallèles, ce corps se meut (156) comme un point matériel dont la masse serait $\frac{Q}{g}$, et auquel serait appliquée la résultante T — F. On a donc

$$T - F = \frac{Q}{g} \cdot \frac{2e}{t^2}.$$

On a aussi, pour le plateau qui descend du même mouvement uniformément accéléré,

$$P - T = \frac{Q}{g} \cdot \frac{2e}{t^2}.$$

Ajoutant ces deux équations, on élimine l'inconnue T, et il vient

$$P - F = \frac{P + Q}{g} \cdot \frac{2e}{t^2};$$

équation où tout est connu, excepté F. Elle permettra donc de calculer la force de frottement, ou mieux, le coefficient f qui n'est autre que le rapport $\frac{F}{Q}$.

De là cette loi : *La force de frottement est indépendante de la vitesse du mouvement.*

Dans ces expériences, l'amplitude de la course du traîneau ne dépassait pas 4 pieds; et sa durée (4 ou 5 secondes) était trop courte pour que Coulomb pût l'observer avec une approximation suffisante au moyen d'une montre qui ne lui donnait que les demi-secondes. Il restait donc quelque incertitude sur la loi précédente. D'ailleurs, les pressions sous lesquelles Coulomb opérait étaient si fortes, qu'elles allaient dans certains cas jusqu'à altérer les surfaces.

Expériences de M. Morin. — En 1831, M. Morin a repris à Metz l'étude du frottement par des procédés nouveaux, suscep-

tibles de fournir la mesure précise des espaces parcourus et des temps correspondants. Il a aussi étendu la course du traîneau à 4 mètres, et les vitesses ont pu varier entre o mètre et $3^{m},5o$ par seconde. M. Morin a d'abord vérifié la constance du frottement, c'est-à-dire son indépendance de la vitesse, pendant toute la durée du mouvement. Mais il est bien entendu que ces expériences ne confirment la loi que dans les limites des vitesses observées (*).

M. Morin a de plus déterminé, avec toute l'exactitude désirable, les valeurs numériques du rapport du frottement à la pression, pour les substances qui sont le plus en usage dans les machines, telles que bois, métaux, frottant à sec ou avec enduits.

Voici quelques nombres extraits des tableaux publiés par M. Morin :

SURFACES PLANES EN CONTACT.	RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION au départ, après un contact de quelque durée.		RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION pendant le mouvement.	
	Sans enduit.	Avec enduit.	Sans enduit.	Avec enduit.)
Chêne sur chêne à fibres parallèles.....	0,62	0,44 (savon sec.)	0,48	0,16 (savon sec.)
Chêne sur chêne à fibres perpendiculaires.....	0,54	//	0,34	//
Bois debout sur bois à plat	0,48	//	0,19	//
Chêne sur fer.....	0,62	0,15 (saindoux.)	0,62	0,08
Fer sur fonte.....	0,19	0,10 (saindoux.)	0,18	0,08

(*) Des expériences faites dans ces dernières années par plusieurs Ingénieurs, sur le glissement des roues de wagons enrayées sur les rails des chemins de fer, ont montré que, lorsque la vitesse du train s'élève à 20 ou 25 mètres par seconde, le frottement ne peut plus être regardé comme indépendant de la vitesse. Il diminue sensiblement à mesure que la vitesse

Comme application des formules du mouvement rectiligne au frottement, résolvons encore le problème suivant :

On lance un traîneau sur un plan horizontal, et on observe le nombre n de secondes qu'il a mis à décrire l'espace rectiligne e, au bout duquel il s'est arrêté; on propose de déduire de cette expérience le coefficient f du frottement relatif aux surfaces en contact et la grandeur de la vitesse initiale.

Soient P le poids du traîneau (qu'il ne sera pas nécessaire de connaître) et v_0 la vitesse initiale inconnue; on a (154 et 156)

$$\frac{P}{g}\varphi = -fP \quad \text{ou} \quad \varphi = -fg;$$

d'où

$$v = v_0 - fgt,$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2.$$

Au bout de n secondes, on doit avoir

$$v = 0 \quad \text{et} \quad x = e.$$

Donc

$$v_0 - fgn = 0,$$

et

$$e = v_0 n - \frac{1}{2} fgn^2 = \frac{1}{2} fgn^2;$$

d'où

$$f = \frac{2e}{gn^2}.$$

---

augmente, toutes choses égales d'ailleurs. D'après cela, le rapport du frottement à la pression pourrait être représenté par la formule

$$f = \frac{K}{1 + av},$$

K étant une constante qui ne dépendrait que de la nature et de l'état des surfaces frottantes, et a un coefficient positif assez petit pour que, lorsqu'il s'agit de vitesses v comprises entre 0 mètre et $3^m,50$ (expériences de M. Morin), le terme av soit négligeable. ou du moins ne produise dans la valeur de f que des variations de l'ordre des erreurs d'observation.

On en déduit aussi la vitesse initiale

$$v_0 = \frac{2e}{n}.$$

Supposons, par exemple, que le traîneau, armé de patins en acier poli, ait été lancé sur la surface glacée d'une rivière, et qu'il se soit arrêté au bout de $10^s,2$, après avoir parcouru un espace de $26^m,4$; on trouvera

$$f = 0,04 \text{ environ}, \quad \text{et} \quad v_0 = 4 \text{ mètres}.$$

175. *Du frottement des tourillons sur leurs coussinets.* — Des expériences spéciales, faites à Metz par M. Morin en 1834, ont montré que le frottement des tourillons sur leurs coussinets cylindriques est soumis aux mêmes lois que celui des surfaces planes, seulement le coefficient f est moindre. Pour les substances métalliques graissées de temps en temps, il a été trouvé égal à 0,07 (en moyenne); et, quand l'enduit est sans cesse renouvelé, il descend à 0,05.

176. *De la résistance au roulement.* — Tout frottement implique, à proprement parler, l'idée de *glissement*. La résistance qu'on éprouve à faire rouler un corps sur un autre, par exemple une voiture sur une route, n'est donc pas un véritable frottement. C'est encore à Coulomb qu'on doit les premières notions exactes sur la résistance au roulement.

Cet habile physicien a trouvé : que *la résistance au roulement est proportionnelle à la pression, et en raison inverse du diamètre des roues*. Les expériences de M. Morin relatives au tirage des voitures sur les routes ont confirmé ces résultats. De plus, elles ont montré que, sur un sol bien empierré et solide, la résistance est sensiblement indépendante de la largeur des jantes; mais que, sur un sol mou, elle augmente à mesure que la largeur des jantes diminue.

177. *Des machines à l'état de mouvement uniforme.* — Lorsqu'une machine entre en mouvement sous l'action continue d'un moteur, les vitesses de ses différents points

commencent par prendre des valeurs croissantes ; mais elles ne tardent pas à atteindre des *maxima* qui dépendent et de la nature du moteur et de l'effet utile que l'on cherche à produire. Le mécanicien fait en sorte qu'à partir de cet instant les vitesses se maintiennent dans ces maxima ou du moins s'en écartent très-peu (*). Quand la machine est ainsi arrivée à ce qu'on appelle l'*état permanent*, son mouvement est uniforme ou du moins composé de périodes uniformes. Pour plus de simplicité nous supposerons l'uniformité parfaite.

Dans cette hypothèse toutes les forces, tant mouvantes que résistantes, doivent se faire à chaque instant équilibre, comme si la machine était en repos. Car, d'une part, on sait que l'action de chaque force est indépendante du mouvement antérieurement acquis ; d'autre part, si toutes les forces ne se détruisaient pas, il y aurait nécessairement des parties de la machine dont le mouvement irait en s'accélérant ou en se ralentissant. Nous allons revenir sur ce point.

178. *Égalité du travail moteur au travail résistant.* — Passons en revue les *machines simples*, en les supposant sollicitées uniquement par une puissance et une résistance, et faisons voir que, d'après les lois d'équilibre déjà établies, *le travail moteur* est *égal au travail résistant*.

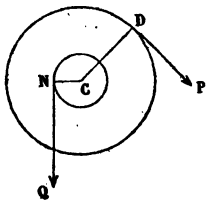
Les déplacements que nous allons considérer peuvent n'être pas *effectifs*, mais simplement *virtuels*, c'est-à-dire qu'ils peuvent n'avoir pas réellement lieu ; mais ils doivent toujours être compatibles avec les conditions actuelles du système.

Cas du treuil. — Le cylindre tourne avec une vitesse constante sous l'action de la puissance P, appliquée dans

(*) On atteint ce but à l'aide des *volants*, dont la description et la théorie ne sauraient trouver place dans un Cours élémentaire.

un plan perpendiculaire à l'axe, à l'extrémité du bras de levier CD (*fig.* 126); la corde s'enroule sur le cylindre CN,

Fig. 126.



et le poids Q monte. Je dis qu'on a entre P et Q l'équation d'équilibre (101)

$$Pp = Qq \tag{1}$$

(p désignant CD et q CN).

On conçoit, en effet, que si la puissance P était plus grande que $Q\frac{q}{p}$, on pourrait la décomposer en deux forces de même direction, l'une égale à $Q\frac{q}{p}$, qui tiendrait le poids Q en équilibre (149); l'autre égale à $\left(P - Q\frac{q}{p}\right)$, qui aurait tout son effet pour accélérer le mouvement (nous faisons abstraction des résistances passives). Si, au contraire, on supposait $P < Q\frac{q}{p}$, on pourrait encore remplacer cette force par deux autres : l'une, de *même direction*, égale à $Q\frac{q}{p}$, qui ferait équilibre au poids Q, et l'autre égale à la différence $\left(Q\frac{q}{p} - P\right)$, mais de *direction contraire*, qui agirait pour retarder le mouvement de rotation et finirait par en changer le sens. Or ces deux conséquences sont contraires à l'hypothèse. Nous en concluons que l'équa-

tion (1) doit subsister dans le treuil à l'état de mouvement uniforme, comme à l'état de repos.

Cela posé, si le poids Q monte d'une hauteur h et que ω désigne l'arc décrit simultanément par un point du treuil dont la distance à l'axe est l'unité, $q\omega$ représentera la longueur de la corde enroulée sur le cylindre, laquelle sera précisément h; et $p\omega$ sera l'arc décrit par le point d'application D de la puissance, dans le sens même de cette force.

Le travail résistant sera donc exprimé en valeur absolue par $Qq\omega$, et le travail moteur par $Pp\omega$, et l'équation (1) montre que ces travaux sont égaux. C. Q. F. D.

Remarques. — I. De l'égalité précédente il résulte que les chemins $p\omega$, $q\omega$, parcourus simultanément par les points d'application de la puissance et de la résistance, sont en raison inverse de ces forces. Ainsi, plus le poids à élever sera grand, moins la hauteur à laquelle il montera (ou la vitesse de son mouvement ascensionnel) sera grande pour un même travail moteur. De là cet adage : *Ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse.* Ce n'est qu'une manière vulgaire d'énoncer le principe de l'égalité du travail moteur au travail résistant.

II. Supposons qu'un ouvrier soit employé à faire tourner la roue d'un treuil pour extraire de la terre d'un puits à 6 mètres de profondeur, et que la circonférence du cylindre, auquel sont suspendus deux paniers dont l'un monte tandis que l'autre descend à vide, ait 1 mètre de longueur; six tours de roue feront monter un panier plein, en sorte que le nombre de paniers que l'ouvrier aura extraits dans sa journée sera le sixième du nombre des tours de roue qu'il aura accomplis. Maintenant, si la profondeur du puits est réduite à 3 mètres, il suffira de trois tours de roue pour faire monter un panier; et la quantité de terre extraite dans la journée de travail sera, toutes choses égales d'ailleurs, double de ce qu'elle était. Mais le produit du poids de la terre par le

chemin vertical qu'elle a parcouru sera le même dans les deux cas. Ainsi, tandis que les deux facteurs varient *pour une même somme d'efforts dépensée par l'ouvrier,* le produit reste constant. On s'explique ainsi pourquoi ce produit sert de mesure au travail, ou au salaire qui doit le rétribuer.

III. Si l'on a égard aux résistances passives, c'est-à-dire au frottement des tourillons sur les coussinets et à la roideur des cordes, résistances qui ne sont jamais négligeables, il faut, pour entretenir le mouvement uniforme, que la puissance P soit plus grande que la valeur $\frac{Qq}{p}$ tirée de l'équation (1); car une partie de son intensité est employée à surmonter ces résistances sans cesse renouvelées. On en conclut

$$Pp\omega > Qq\omega,$$

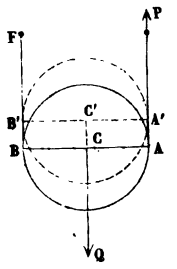
c'est-à-dire que, dans la pratique, *le travail moteur est toujours plus grand que le travail résistant utile.* Cette conclusion sera généralisée plus loin.

IV. Le travail absorbé par le frottement des tourillons dépend de deux facteurs : la force de frottement et le chemin que parcourt son point d'application. Nous avons vu comment l'emploi de substances métalliques bien polies, recouvertes d'un enduit gras sans cesse renouvelé, permet d'atténuer la valeur du premier facteur. C'est pour agir dans le même sens sur le second que l'on donne aux tourillons qui terminent l'arbre d'un treuil un petit diamètre; on réduit ainsi l'étendue du glissement. En effet, à chaque tour que fait l'arbre, le tourillon fait lui-même un tour sur son coussinet; et, par suite, le chemin décrit par le point d'application de la résistance tangentielle due au glissement n'est autre que la circonférence du tourillon.

Dans les roues dentées, on devra, de même, préférer les petites dents aux grandes; car l'étendue du glissement de ces dents les unes sur les autres sera moins grande pour les premières que pour les secondes.

Cas de la poulie mobile. — On supposera, pour plus de simplicité, les cordons AP, BF parallèles (*fig.* 127). Si l'on donne à la machine un déplacement tel, que le poids Q s'élève de la quantité $CC' = h$,

Fig. 127.



le diamètre horizontal AB montera en A'B', et les distances PA, FB se raccourciront chacune de cette quantité h. Par conséquent, un point pris à volonté sur le cordon PA, comme point d'application de la puissance P, montera de la quantité $2h$. Or on a, dans l'état d'équilibre,

$$Q = 2P;$$

donc

$$Qh = 2Ph = P.2h,$$

ce qui démontre l'égalité du travail moteur au travail résistant.

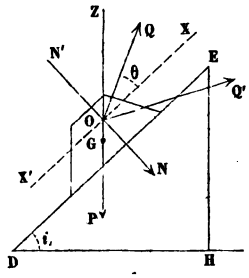
Il serait tout aussi facile de vérifier ce principe dans un système de poulies mouflées. Nous ne nous y arrêterons pas.

Cas du plan incliné. — L'équation d'équilibre entre le poids P du corps, qui tend à glisser le long du plan, et la force Q destinée à le retenir (*fig.* 128), est, comme on l'a vu,

$$(1) \qquad P \sin i = Q \cos\theta,$$

i désignant l'inclinaison du plan sur l'horizon, et θ l'angle de la force Q avec le plan incliné. Si le corps glisse, soit

Fig. 128.



à la descente, soit à la montée, d'une longueur h, le point d'application des forces P et Q décrit une droite égale et parallèle à h; et pour avoir les travaux correspondants, il faut projeter ce chemin sur les directions des forces. Ces projections sont en valeur absolue,

$$h\sin i \quad \text{et} \quad h\cos\theta;$$

et, par suite, les travaux

$$Ph\sin i, \quad Qh\cos\theta$$

sont égaux en vertu de l'équation ci-dessus. C. Q. F. D.

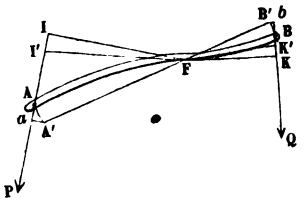
Cas du levier. — L'équation d'équilibre est (76)

$$Pp = Qq, \tag{1}$$

en désignant par p, q les distances du point d'appui aux deux forces. Pour vérifier, dans cette machine, l'égalité du travail moteur au travail résistant, il est nécessaire de ne donner au levier qu'un mouvement *infiniment petit* autour de son point d'appui, et de projeter les arcs décrits par les points d'application, considérés comme des éléments de lignes droites, sur les directions des forces. Nous supposerons que le mouvement de rotation du levier ait lieu au-

tour d'un axe perpendiculaire au plan des deux forces, et nous considérerons d'abord celles-ci comme appliquées aux points I et K (*fig.* 129), pieds des perpendiculaires abaissées du point d'appui sur leurs directions.

Fig. 129.



Soient II′, KK′ les arcs infiniment petits parcourus simultanément par ces points; comme ils se confondent en direction avec leurs tangentes AP, BQ, les travaux élémentaires correspondants seront (abstraction faite des signes)

$$P.II' \quad \text{et} \quad Q.KK'.$$

Or on a

$$II' = p\omega, \quad KK' = q\omega,$$

en désignant par ω la quantité angulaire dont le levier a tourné, c'est-à-dire l'arc décrit par un point situé à l'unité de distance de l'axe.

Donc les travaux moteur et résistant ont pour expressions

$$Pp\omega \quad \text{et} \quad Qq\omega,$$

et l'on voit qu'ils sont égaux en vertu de l'équation (1).

Ainsi, dans le cas où les points d'application sont transportés aux points I et K, la démonstration est des plus simples.

Le cas général se ramène aisément à celui-là. Soit AA′ l'arc décrit par le point d'application A, et A a sa projection sur la direction de la force. Je dis que le travail élémentaire P.Aa est le même que le travail P.II′ considéré plus haut,

c'est-à-dire que $Aa = II'$. En effet, les deux triangles AaA' et AIF sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires; donc

$$\frac{Aa}{p} = \frac{AA'}{FA}.$$

Or

$$\frac{AA'}{FA} = \omega = \frac{II'}{p};$$

donc

$$\frac{Aa}{p} = \frac{II'}{p} \quad \text{ou} \quad Aa = II'.$$

Mais il faut bien remarquer que cette égalité n'existe qu'entre quantités infiniment petites; car les arcs ont été confondus avec leurs cordes. Ce qui est réellement démontré, c'est que *le rapport* $\frac{Aa}{II'}$ *a pour limite l'unité, quand le déplacement imprimé au levier tend vers zéro;* et c'est aussi dans ce sens qu'il faut entendre l'égalité entre les deux travaux élémentaires.

Remarque. — Le mot d'Archimède : « Qu'on me donne un levier et un point d'appui, et je soulèverai le monde », a besoin d'un commentaire, pour ne pas prêter à une fausse interprétation. Sans doute, avec une faible puissance agissant à l'extrémité d'un bras de levier suffisamment long, je pourrai faire *équilibre* à un poids aussi grand qu'on voudra, placé de l'autre côté et à petite distance du point d'appui. Mais s'il s'agit de *soulever* ce poids, de le *déplacer* d'une quantité sensible, ce levier sera d'un très-médiocre effet; car le chemin parcouru par le poids ne sera qu'une fraction excessivement petite du chemin parcouru dans le

(*) On remarquera aussi cette proposition, qui ne se présente ici que dans un cas particulier, mais dont la généralité est facile à établir : *Lorsqu'on transporte le point d'application d'une force en un point quelconque de sa direction, invariablement lié au premier, le travail élémentaire de la force ne change pas.*

même temps par le point d'application de la puissance, fraction marquée par le rapport de la puissance à la résistance.

179. *Généralisation des résultats précédents.* — En résumant tout ce qui vient d'être dit sur le travail des forces dans les machines simples sollicitées uniquement par une puissance et une résistance en équilibre, on peut en dégager l'énoncé d'une proposition qui convient à tous les cas. Le voici :

La somme des produits des forces par les projections, sur leurs directions respectives, des espaces infiniment petits parcourus simultanément par leurs points d'application, est égale à zéro.

Et cette égalité a lieu pour tout déplacement virtuel, compatible avec les conditions du système. Les projections sont considérées comme positives ou négatives, selon qu'elles tombent sur les directions mêmes des forces ou sur leurs prolongements.

Cette proposition s'étend à un système de points matériels liés entre eux de telle manière qu'on voudra, et sollicités par un nombre quelconque de forces en équilibre. Elle prend alors le nom de *principe des vitesses virtuelles*. On appelle *vitesses virtuelles* les déplacements infiniment petits des points du système, lesquels sont proportionnels à leurs vitesses, puisqu'on les conçoit accomplis dans un même temps infiniment petit. Quant au mot *virtuel*, il signifie, comme on l'a dit, que ces déplacements ne sont pas effectifs, mais seulement possibles. Ce principe comprend toutes les équations de la Statique. Sa démonstration nous entraînerait au delà des bornes d'un Cours élémentaire. Nous nous bornerons à l'admettre, pour en faire l'application au travail des machines sollicitées par des forces quelconques, mouvantes et résistantes.

180. *Théorème de la transmission du travail. — Influence des résistances passives.* — Considérons une machine à l'état de mouvement uniforme, et soient T_m la somme des travaux développés par les forces mouvantes depuis l'origine du mouvement uniforme, ou le *travail moteur total*; T_u la somme des travaux dus aux résistances utiles, ou le *travail résistant utile*; T_p le travail dû aux résistances passives, ou le *travail résistant passif*.

Puisque les forces se font équilibre, la somme algébrique de leurs travaux élémentaires est nulle à chaque instant, en vertu du principe précédent; et, par conséquent, la somme totale des travaux moteur et résistant, qui répondent à des déplacements finis et simultanés de tous les points d'application, est également nulle. On a donc

$$T_m - T_u - T_p = 0,$$

ou

$$T_m = T_u + T_p.$$

Ainsi, à partir du moment où une machine a pris son mouvement uniforme, *le travail moteur est égal au travail résistant utile augmenté du travail résistant passif.*

Déjà, dans le cas du treuil, nous avions apprécié l'influence des résistances passives et fait voir qu'elles entraînaient une perte de travail moteur.

En général, il résulte de l'équation précédente que l'on a

$$T_m > T_u;$$

car T_p est de même signe que T_u et n'est jamais nul. Ainsi *le travail moteur est toujours plus grand que le travail résistant utile.* En d'autres termes, une machine transmet moins de travail utile qu'elle n'en reçoit.

Le rapport $\frac{T_u}{T_m}$, toujours inférieur à 1, se nomme le *ren-*

dement de la machine. Il est très-variable d'une machine à une autre : dans certaines machines, il tombe à 0,45, à 0,35; dans les meilleures, il s'élève au plus à 0,80.

C'est faute de connaître la théorie de la transmission du travail, que certaines personnes se font des idées exagérées sur la puissance des machines.

181. *Du cheval-vapeur.* — Lorsqu'il s'agit d'apprécier le degré de puissance d'une machine qui fonctionne d'une manière continue, il y a lieu, comme nous l'avons déjà dit (170), d'associer la considération du temps à celle du travail. Deux machines seront évidemment de force très-inégale, si, pour arriver à produire la même quantité de travail, il leur faut des temps très-différents. L'unité dynamique généralement adoptée, dans le calcul de l'effet des machines, est le *cheval-vapeur*, qui représente un *travail de* 75 *kilogrammètres par seconde.* L'origine de cette unité remonte à l'époque où fonctionna la première machine à vapeur, dans les mines du comté de Cornouailles, pour faire marcher les pompes destinées à l'épuisement des eaux d'infiltration. Le travail avait été fait jusque-là par des chevaux attelés à un manége, et l'on fut naturellement conduit à mesurer la force de la machine par celle des chevaux qu'elle était destinée à remplacer. Mais il faut se garder de confondre le cheval-vapeur avec le travail d'un cheval ordinaire qu'on ne veut pas surmener. Ainsi un cheval, attelé à un manége et allant au pas (allure la plus favorable au travail), ne peut guère exercer un effort moyen supérieur à 45 kilogrammes, ni travailler plus de 8 heures par jour. En estimant à $0^{m},90$ le chemin que fait l'animal par seconde, on obtient un travail de $40^{kgm},5$ par seconde. Mais, pour le cheval-vapeur, la durée du travail journalier n'est plus limitée à 8 heures, elle est de 24 heures. En conséquence, le rapport du travail journalier du cheval-vapeur à celui du cheval ordinaire attelé à un manége est

$$\frac{75.24.3600}{40,5.8.3600} = \frac{75}{13,5} = 5,56.$$

Ainsi le cheval-vapeur, marchant nuit et jour, représente plus de cinq fois le travail d'un cheval ordinaire attelé à un manége.

La comparaison serait un peu moins désavantageuse pour le cheval ordinaire, si on le supposait employé à tirer une voiture sur une route. Dans ce cas, il peut, sans être surmené, exercer, allant au pas, une traction de 70 kilogrammes, ce qui donne un travail de 63 kilogrammètres par seconde; et la durée du travail peut être portée à 10 heures par jour. Le rapport du cheval-vapeur au cheval ordinaire devient alors $\frac{2}{7}$. Le cheval-vapeur représente donc environ le travail de trois chevaux ordinaires, qui seraient employés à tirer une voiture.

182. *De la force vive. — Relation entre la force vive et le travail dans le mouvement rectiligne d'un point matériel.* — A la considération du *travail* se rattache intimement la notion de *force vive,* qui joue un rôle important dans le calcul de l'effet des machines.

On appelle *force vive* d'un point matériel en mouvement le produit de sa masse par le carré de sa vitesse, mv^2. Ce produit n'est pas, à proprement parler, une *force,* mais bien un *effet* dynamique tout à fait comparable au travail, ainsi qu'on va le voir.

Si un corps de poids p tombe en chute libre d'une hauteur h, le travail correspondant est ph. Or, on sait (133) que la hauteur h est liée à la vitesse v, acquise à la fin de la chute, par la relation $h = \frac{v^2}{2g}$. L'expression du travail prend donc la forme

$$\frac{1}{2}\frac{p}{g}v^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}mv^2.$$

Ainsi, le travail produit par la pesanteur sur un mobile en chute libre est égal à la demi-force vive acquise à la fin de la chute.

Si le poids p glisse sur un plan incliné d'un angle α à l'horizon, on a vu (160) que le carré de la vitesse correspondante à l'espace décrit x est

$$v^2 = 2gx\sin\alpha.$$

Or le travail se mesure, dans ce cas, en multipliant la force estimée suivant la direction du chemin par la direction du chemin, ce qui donne

$$p \sin\alpha . x,$$

ou, en remplaçant $x \sin\alpha$ par sa valeur $\frac{v^2}{2g}$,

$$\frac{1}{2}\frac{p}{g}v^2,$$

comme ci-dessus.

L'expression précédente s'étend à tout mouvement uniformément varié, puis à un mouvement rectiligne quelconque.

En effet, soient F la force constante appliquée au point dont la masse est m, φ l'accélération $= \frac{F}{m}$, v_0 la vitesse initiale, v la vitesse acquise au bout du temps t, e l'espace parcouru; on a

$$(1) \qquad \begin{cases} v = v_0 + \varphi . t, \\ e = v_0 t + \frac{1}{2}\varphi . t^2; \end{cases}$$

et le travail τ, qui répond au chemin e, est

$$\tau = Fe = m\varphi e.$$

Cela posé, éliminons le temps t entre les équations (1). Il vient successivement

$$e = \frac{v - v_0}{\varphi}\left(v_0 + \frac{1}{2}\varphi . t\right),$$

$$e = \frac{v - v_0}{\varphi}\left(\frac{v + v_0}{2}\right);$$

d'où

$$\varphi e = \frac{v^2 - v_0^2}{2},$$

et

$$\tau = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Maintenant, pour passer à un mouvement rectiligne quelconque, il suffira de partager le temps en intervalles infiniment petits durant lesquels la force sera considérée comme constante, puis de faire la somme des travaux élémentaires correspondants. Si v_0, v_1, $v_2, \ldots$, v_{n-1}, v_n désignent les vitesses successives du mobile au commencement et à la fin de ces intervalles, et τ_1, τ_2, $\tau_3, \ldots$, τ_n les travaux correspondants, on aura

$$\tau_1 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2), \quad \tau_2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2), \ldots, \quad \tau_n = \frac{1}{2} m (v_n^2 - v_{n-1}^2);$$

d'où le travail total

$$T = \frac{1}{2} m (v_n^2 - v_0^2).$$

Ainsi, *le travail de la force pendant un intervalle de temps quelconque est égal* (en grandeur et en signe) *à la demi-variation de force vive du mobile pendant cet intervalle.*

Tel est le *principe des forces vives* pour un point matériel libre, animé d'un mouvement rectiligne.

Il convient également à un corps de dimensions finies dont tous les points sont animés à chaque instant d'une même vitesse et décrivent des droites parallèles. On appelle alors *force vive* du corps la somme des forces vives de tous les points matériels qui le composent, ou encore le produit de sa masse par le carré de sa vitesse.

Ce principe fournit une expression très-commode du travail, quand la vitesse du mobile est donnée par l'observation. Par exemple, un cours d'eau ayant une vitesse moyenne de $0^m,75$, et débitant 5000 litres par seconde, donnerait une force vive égale à

$$\frac{5000 \times (0,75)^2}{9,8088} = 286^{kgm},$$

et, par suite, un travail moteur disponible égal à la moitié de ce nombre, soit 143 kilogrammètres par seconde.

Si une voiture de roulier, pesant 10 000 kilogrammes, doit être mise en mouvement par des chevaux, avec la vitesse du pas ordi-

naire, 1 mètre par seconde, la force vive correspondante sera

$$\frac{P}{g}v^2 = \frac{10000 \times 1}{9,8088} = 1020 \text{ (environ)}.$$

La quantité de travail que les chevaux devront produire dans le premier instant, pour vaincre l'inertie de la voiture et lui imprimer cette vitesse, sera moitié de ce nombre ou 510 kilogrammètres (sans compter les résistances passives). Toutefois un travail aussi considérable n'est nécessaire que dans la première seconde, pour faire entrer la voiture en mouvement : il s'abaisse à un chiffre inférieur dès qu'elle roule régulièrement.

Dans le choc des corps sphériques *complétement mous* (167), il y a une *perte de force vive* dont l'expression mérite d'être remarquée.

La somme des forces vives du système avant le choc est

$$mv^2 + m'v'^2,$$

et, après le choc,

$$(m + m')u^2,$$

u désignant la vitesse commune $\frac{mv + m'v'}{m + m'}$. Or la différence

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2$$

n'est pas altérée en retranchant la quantité nulle

$$2u(mv + m'v' - mu - m'u);$$

il vient donc

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2 = m(v - u)^2 + m'(v' - u)^2,$$

quantité évidemment positive. Ainsi il y a perte de force vive, et cette perte est *égale à la somme des forces vives correspondantes aux vitesses perdues* par les deux corps. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème dû à Carnot.

Au contraire, dans le choc des corps *parfaitement élastiques*, la somme des forces vives se retrouve la même après qu'avant le choc : en effet, la différence

$$mv^2 + m'v'^2 - mV^2 - m'V'^2$$

est égale a

$$mv^2 + m'v'^2 - m(2u - v)^2 - m'(2u - v')^2,$$

ou à

$$4u(mv + m'v' - mu - m'u),$$

quantité identiquement nulle. Il n'y a donc, dans ce cas, ni perte ni gain de force vive.

183. *Énoncé du principe général des forces vives; conséquences.* — Dans un Cours plus élevé on fera voir comment le principe des forces vives s'étend d'abord à un point matériel animé d'un mouvement curviligne quelconque, puis à un système de points matériels liés entre eux de telle manière que l'on voudra. Nous l'admettrons ici dans toute sa généralité, afin d'en tirer quelques conséquences utiles sur le travail des machines.

En conservant les notations précédentes, et désignant par la caractéristique $\sum$ une somme de termes semblables étendue à tous les points de la machine, on aura

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\sum m(v^2 - v_0^2) = T_m - T_u - T_p.$$

Si l'on considère le travail de la machine à partir de l'origine du mouvement, il faut faire dans cette équation $v_0 = 0$, et comme alors le premier membre est essentiellement positif, il en doit être de même du second. Donc on a

$$T_m > T_u + T_p.$$

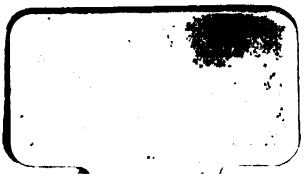
Ainsi, *le travail moteur, compté à partir du moment où la machine entre en mouvement, l'emporte sur le travail résistant.*

Si l'on suppose que la machine soit parvenue à l'état de mouvement uniforme, et que l'on ne compte le travail qu'à partir de cet instant, il faut faire dans l'équation (1) $v = v_0$; le premier membre devient nul, et l'on retrouve l'équa-

tion du n° 180, c'est-à-dire l'égalité du travail moteur au travail résistant.

184. *Impossibilité du mouvement perpétuel.* — Supposons qu'une machine ait été mise en mouvement d'une manière quelconque, et que les forces mouvantes viennent à disparaître. Écartons même tout travail utile afin de diminuer les résistances qui s'opposent à la continuation du mouvement; l'équation (1) se réduira à

$$\sum mv^2 = \sum mv_0^2 - 2T_p. \tag{2}$$

Or T_p, travail dû aux résistances passives, est une somme de termes tous de même signe et continuellement croissants. Il arrivera donc un instant où $2T_p$ atteindra la constante $\sum mv_0^2$. Mais alors le deuxième membre de l'équation (2) sera nul. Donc toutes les vitesses v se réduiront à zéro, et la machine s'arrêtera. Ainsi le but que poursuivent les chercheurs de mouvement perpétuel, en prétendant construire une machine qui puisse se passer de moteur, est complétement chimérique. Rappelons, en terminant, qu'il n'est pas moins illusoire (180) de chercher à construire une machine qui rende autant de travail utile qu'elle a reçu de travail moteur.

FIN.